

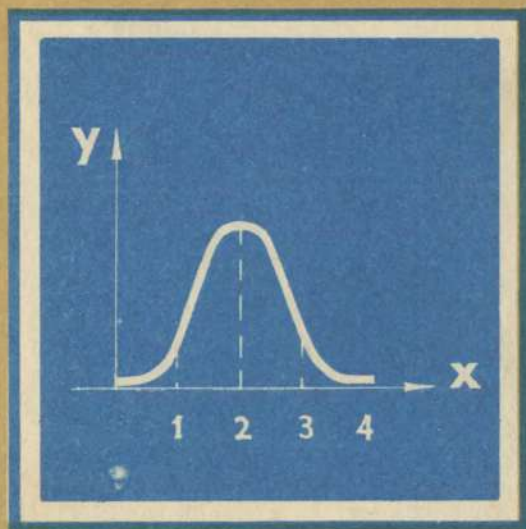
НОВОЕ  
В ЖИЗНИ, НАУКЕ,  
ТЕХНИКЕ

ЗНАНИЕ

В.Л. Рвачев

В.А. Рвачев

ТЕОРИЯ  
ПРИБЛИЖЕНИЙ  
И АТОМАРНЫЕ  
ФУНКЦИИ



3/1978

СЕРИЯ  
МАТЕМАТИКА,  
КИБЕРНЕТИКА

**В. Л. Рвачев,**

член-корреспондент АН УССР

**В. А. Рвачев,**

кандидат физико-математических наук

**ТЕОРИЯ  
ПРИБЛИЖЕНИЙ  
И АТОМАРНЫЕ  
ФУНКЦИИ**

*Дорогому Владимиру  
Михайловичу от автора  
Тихомирову*

*2. XI. 78*

*В. А. Рвачев*

**Рвачев В. Л. и Рвачев В. А.**

**P-29**

Теория приближений и атомарные функции. М., «Знание», 1978.

64 с. (Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика», 3. Издается ежемесячно с 1967 г.)

Брошюра в популярной форме знакомит читателя с важным разделом математики — конструктивной теорией функций и новейшими результатами в этой области (теории R-функций, сплайн-функций и атомарных функций). Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой.

51

20200

© Издательство «Знание», 1978 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Необходимость совершенствования конструктивных средств математики является в настоящее время одной из важнейших проблем. Это в значительной степени связано с прогрессом в области вычислительной техники. Появилась возможность решения значительно более сложных, чем ранее, задач, что, с одной стороны, привело к возникновению новых проблем и, с другой — потребовало произвести переоценку ценностей в том математическом багаже, который был накоплен ранее.

Одной из таких областей математики, в которой за последние годы произошли существенные изменения, является конструктивная теория функций (теория приближений). Основы теории приближений заложили П. Л. Чебышев и К. Вейерштрасс, а развилась она в трудах многих известных зарубежных (Валле-Пуссен, Джексон, Фавар и др.) и советских математиков (А. Н. Колмогоров, С. Н. Бернштейн, С. М. Никольский, Н. И. Ахиезер, А. А. Гончар, В. К. Дзядык, Н. П. Корнейчук, П. П. Коровкин, В. М. Тихомиров, С. Б. Стечкин и другие). В наше время наряду с теорией приближения классическими полиномами (тригонометрическими, степенными) интенсивно развивается теория сплайнов, представляющая собой идейную базу широко известного метода решения краевых задач математической физики — метода конечных элементов.

Академик Н. Н. Яненко следующим образом характеризует этот метод: «Метод конечных элементов можно рассматривать как специальный случай метода Рунге — Галеркина. Этот классический подход имеет два существенных недостатка. Во-первых, на практике построение базисных функций возможно только для некоторых специальных областей  $\Omega$ , во-вторых, соответствующие матрицы Рунге — Галеркина являются полными матрицами и очень часто даже для простых задач плохо обусловлены. Принципиальное различие между методом конечных элементов и классической техникой Рунге — Галеркина лежит в по-

строении базисных функций. В методе конечных элементов базисные функции выбираются в виде сплайнов и для областей общего вида могут быть вычислены весьма просто. Главная особенность этих базисных функций состоит в их финитности, т. е. в том, что они обращаются в нуль всюду, кроме фиксированного числа элементарных под областей, на которые делится данная область. Это свойство влечет за собой разреженность и ленточную структуру матрицы Рунца-Галеркина (или матрицы жесткости системы, пользуясь термином, принятым в теории упругости) и устойчивость численного процесса решения системы».

Оказывается, что для преодоления указанных трудностей не обязательно идти по пути использования метода конечных элементов. Можно применить результаты теории  $R$ -функций и атомарных функций, предложенных и развитых в работах авторов. О том, что такое  $R$ -функции и атомарные функции и также что они дают теории приближений, и рассказывается в этой брошюре.

## § 1. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Многие научно-технические проблемы сводятся к отысканию функциональных зависимостей между некоторыми величинами. Например, нагрузка, которую может выдержать некоторое сооружение, есть функция от конструктивных параметров (геометрических, физических и др.) ее элементов, а также от условий внешней среды. Без преувеличения можно сказать, что главным содержанием многих научных направлений является именно отыскание тех или иных функциональных соотношений.

Несмотря на многообразие различных функциональных зависимостей, встречающихся в научных исследованиях и инженерной практике, можно выделить некоторые наиболее характерные проблемы математического характера, к решению которых поиск этих зависимостей сводится. К числу таких проблем в первую очередь относятся те вопросы, которые изучаются в теории приближений (конструктивной теории функций) и в математической физике (теории упругости и пластичности, электродинамике, теплофизике, аэро- и гидродинамике, теории фильтрации и др.).

Назовем две задачи, характерные для теории приближений.

1. Задача интерполяции и экстраполяции. В результате измерений некоторой физической величины получены ее значения в данных точках пространства и в данные моменты времени. Требуется определить ее значение (хотя бы приближенно) в другие моменты времени и в других точках пространства.

2. Задача аппроксимации. Функциональная зависимость задана в виде графиков, таблиц, громоздких формул или в неявном виде как решение некоторой задачи. Требуется найти ее приближенное представление посредством конструктивно простой формулы, например, имеющей вид полинома заданной степени.

Каждая из этих задач может иметь большое число различных оттенков, определяемых теми или иными дополнительными условиями или ограничениями. Наиболее трудными и в то же время наиболее интересными являются задачи интерполяции и аппроксимации, в которых требуется получить наилучшее приближение к рассматриваемой функциональной зависимости. Здесь сразу же возникает ряд вопросов, например: «Что значит «наилучшее приближение?»», «Как найти наилучшее приближение к данной функции, если искать его в некотором конструктивно заданном множестве, скажем, в множестве степенных или тригонометрических полиномов?» Некоторые другие вопросы будут затронуты в дальнейшем.

Первый из этих вопросов возникает в связи с тем, что для характеристики качества приближения к функции, вообще говоря, недостаточно таких показателей, как относительная и абсолютная погрешности, используемые для оценки приближения числовых величин. Чтобы пояснить эту мысль, рассмотрим функцию  $u(x)$  (сплошная линия на рис. 1а) и ее приближение  $u_n(x)$  (пунктирная линия). Предположим, что в точке  $x_1$ , где точное решение равняется нулю,  $u_n = 0,01$ , а в точке  $x_2$ , где  $u = 10000$ ,  $u_n = 9900$ . Нетрудно видеть, что максимальная относительная погрешность здесь бесконечно велика, а максимальная абсолютная погрешность равна 100, т. е. также является весьма значительной. Между тем, взглянув на графики  $u(x)$  и  $u_n(x)$ , с практической точки зрения можно сказать, что приближение  $u_n(x)$  является «весьма хорошим». Рассмотрим теперь другой пример (рис. 1, б), в котором предположим, что отклонения  $u_n(x)$  от  $u(x)$  настолько малы, что максимальная относительная погрешность меньше  $10^{-3}$ , а  $u_n(x)$  имеет вид волнистой линии. Казалось бы,  $u(x)$

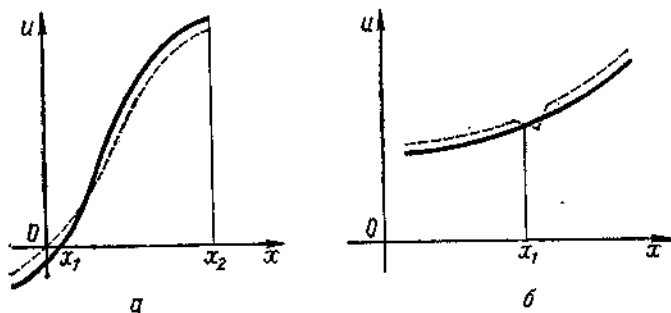


Рис. 1.

есть хорошее приближение к  $u(x)$  по всем показателям. Однако если нас заинтересуют значения ее производной  $u'(x)$ , то нетрудно заметить, что, например, в точке  $x_1$  разность  $u'(x) - u'_n(x)$  не является малой. Еще более значительными будут отклонения  $u''(x)$  от  $u''_n(x)$ .

Преодолеть приведенные выше трудности позволяют методы функционального анализа. Вводятся различного типа функциональные пространства (т. е. пространства, в которых функции играют роль точек) со своей метрикой, которая определяет меру близости функций между собой. Чаще всего для характеристики «величины» или «малости» погрешности  $\delta = u - u_n$  используют понятие нормы. В различных ситуациях прибегают к различным нормам. Наиболее употребительные из них такие:

1. Равномерная норма (метрика  $C(\Omega)$ ):

$$\|f(x)\|_{C(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|; \quad (1)$$

2. Среднеквадратичная норма (метрика  $L_2(\Omega)$ ):

$$\|f(x)\|_{L_2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где  $\Omega$  — область, в которой рассматривается функция  $f(x)$ .

Ряд других широко используемых норм представляют собой различные обобщения равномерной и среднеквадратичной норм, учитывающие также и близость их производных до некоторого порядка. (Нормы пространств  $C^k(\Omega)$ , соболевских пространств  $W_p^k(\Omega)$  и др.)

Норма разности  $\|\delta(x)\|_x = \|u(x) - u_n(x)\|_x$  играет роль абсолютной погрешности, а величина  $\|\delta(x)\|_x$ :

:  $\|u(x)\|_X$  может рассматриваться как относительная погрешность (по норме пространства  $X$ ).

Сравнение норм  $\|f(x)\|_C$  и  $\|f(x)\|_{L_2}$  показывает, что из малости первой нормы следует малость второй, однако обратное утверждение не верно. Норма  $\|f(x)\|_{L_2}$  не чувствительна к локальным изменениям функции  $f(x)$ : можно сильно изменить значения функции  $f(x)$  на очень маленьком участке, что приведет лишь к незначительному изменению интеграла в формуле (1). Это означает, что при  $\|u(x) - u_n(x)\|_C \rightarrow 0$  будет также  $\|u(x) - u_n(x)\|_{L_2} \rightarrow 0$ , но не наоборот. Таким образом, приближение по норме пространства  $C(\Omega)$  можно назвать «более сильным», чем по норме пространства  $L_2(\Omega)$ . В соответствии с этим методы, обеспечивающие сходимость по норме  $C(\Omega)$ , являются «более сильными», чем методы, обеспечивающие сходимость по норме  $L_2(\Omega)$ . (Трудность, однако, состоит в том, что реализация более сильных методов, как правило, более сложна).

Вернемся теперь ко второй из упоминавшихся проблем теории приближений — о наилучшем приближении (в смысле той или иной нормы) к данной функции в некотором конструктивно заданном множестве. Наиболее трудный и в то же время наиболее важный для практики вариант этой проблемы формулируется в виде так называемой краевой задачи математической физики, постановка которой чаще всего имеет следующий вид. Искомая функция  $u(x)$  (это может быть вектор-функция, тензор и т. п.) должна внутри некоторой области  $\Omega$  удовлетворять уравнению

$$Au = f, \quad (3)$$

а на ее границе  $\partial\Omega$  — условиям вида

$$B_i u|_{\partial\Omega_i} = \varphi_i (i=1, \dots, m), \quad (4)$$

где  $\partial\Omega_i$  — участки  $\partial\Omega$  (не обязательно различные), которые могут и совпадать с  $\partial\Omega$ ,  $A$  и  $B_i$  — заданные операторы, а  $\varphi_i, f$  — заданные функции. При этом область  $\Omega$  обычно есть область обычного пространства  $\mathbb{R}^n$ . При  $n=1$   $\Omega$  есть отрезок (или система отрезков) на числовой оси, при  $n=2$  — некоторая плоская, а при  $n=3$  — пространственная область. Случай, когда  $n=4$  возникает, например, в так называемых нестационарных задачах, когда наряду с пространственной точкой  $x=(x_1, x_2, x_3)$  необходимо учитывать время  $t$ . В этом случае примем, что  $x=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , где  $x_4=t$ .



Нетрудно заметить, что в постановке задачи (3) — (4) присутствуют два различных типа входной информации. С одной стороны, это информация о функциях  $f$  и  $\varphi_i$ , операторах  $A$  и  $B_i$ , имеющая аналитический характер, с другой — информация геометрического характера о форме области  $\Omega$  и участках ее границы  $\partial\Omega_i$ . В большинстве приложений уравнение (3) в сочетании с условиями (4) представляет собой математическую модель некоторого поля. При этом уравнение (3) учитывает основные физические законы, которым подчиняется поле, область  $\Omega$  имеет форму тела, в котором поле возбуждается, а условия (4) отражают характер взаимодействия рассматриваемого тела с другими телами и внешней средой. Например, при определении стационарного температурного поля в некоторой области уравнение (3) есть уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x), \quad (5)$$

где  $f(x)$  — функция, характеризующая плотность распределения источников тепла. На участке  $\partial\Omega_1$  границы, где известна температура,  $u = \varphi_1$  (условие Дирихле), на участке  $\partial\Omega_2$ , где задан тепловой поток,  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi_2$  (условие Неймана), а на участке  $\partial\Omega_3$ , где осуществляется теплообмен по закону Ньютона,  $\frac{\partial u}{\partial \nu} + hu = \varphi_3$ . Здесь  $\nu$  — внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ ,  $h$  — коэффициент теплообмена, а  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  — известные функции. (В реальных задачах не обязательно присутствие всех трех типов краевых условий. Может иметь место одно или сочетание какой-либо пары из них).

В электродинамике вместо уравнения (5) может оказаться система уравнений Максвелла, в теории упругости — система уравнений Ламе, при определении поперечного изгиба тонких пластин — уравнение Софи Жермен и т. п. Соответствующим образом изменяются и краевые условия (4). Встречаются также и различные нелинейные варианты уравнения (3) (внутренняя нелинейность) и краевых условий (4) (внешняя нелинейность).

Присутствие в постановке краевых задач двух различных видов информации — геометрической и аналитической — создает особые трудности при разработке методов их решения. Всякий такой метод неизбежно должен предусматривать совместную переработку этих видов информации, и поэтому геометрическая информация должна быть

приведена к аналитическому виду. В таких классических методах, как методы разделения переменных и интегральных преобразований, геометрия области  $\Omega$  учитывается путем удачного выбора системы координат. Если, например,  $\Omega$  есть прямоугольник, то выбирается прямоугольная система координат, если круг — то полярная и т. п. В методе конформных отображений учет геометрии производится при построении функций, отображающих данную область  $\Omega$  на круг, в методе интегральных уравнений — при интегрировании по заданной области или участкам ее границы и т. д. Однако все реже и реже удается находить точные решения краевых задач — в этом отношении они подобны вымирающим животным. Для области достаточно сложного вида и при достаточно сложном характере краевых условий получить точное решение общего вида (т. е. для произвольных  $f, \varphi_1$ ) — задача в настоящее время практически безнадежная. Поэтому в последние годы все чаще обращаются к приближенным методам. Наиболее распространенными среди них являются методы сеточного типа (в том числе метод конечных элементов), проекционные и вариационные методы [4, 7, 8]. Впрочем, грань между названными методами весьма условна: разностные методы и метод конечных элементов можно трактовать как вариационные, а один и тот же вычислительный алгоритм во многих случаях можно получать как вариационным, так и проекционным путем. Поэтому можно считать, что во всех таких методах имеется один и тот же конструктивный подход. А именно приближенное решение разыскивается в виде

$$u_N = \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k(x) + \varphi_0(x), \quad (6)$$

где  $\varphi_k(x)$  — заранее выбранные известные функции. (В простейшем варианте сеточного метода  $C_k$  — это значение неизвестного решения в  $k$ -ом узле сетки, а  $\varphi_k(x)$  ( $k=1, \dots, N$ ) — функция, равная 1 в  $k$ -ом узле, и 0 — в остальных.) Подставляя (6) в уравнение (3) и краевые условия (4), приходим к задаче такого выбора постоянных  $C_k$ , чтобы эти условия возможно точнее удовлетворялись (в смысле той или иной метрики). В сеточных методах  $N$  выбирают равным количеству внутренних и граничных узлов сетки, и отыскание коэффициентов  $C_k$  сводится к решению  $N$  алгебраических уравнений с  $N$  неизвестными. Для многих типов проекционных и вариационных методов возникает

вопрос о таком выборе функций  $\varphi_k$ , который обеспечил бы удовлетворение краевых условий (4). До недавнего времени эта задача для случая областей сколь-нибудь сложной геометрии считалась неразрешимой (в рамках известных конструктивных средств). Однако, как будет показано в следующем параграфе, посвященном методу  $R$ -функций, на этот вопрос может быть дан вполне удовлетворительный ответ.

При удовлетворении краевых условий коэффициенты  $C_k$  можно находить, например, следующими методами:

1. Потребовать выполнения уравнения  $Au_n(x) = f(x)$  в  $N$  заданных точках  $x^1, \dots, x^{(N)}$  области  $\Omega$ . В случае линейного уравнения  $Au = f$  получим систему  $N$  алгебраических уравнений относительно  $N$  неизвестных  $C_1, \dots, C_N$ . Этот метод называется *коллокацией*.

2. Найти  $C_1, \dots, C_N$  такие, чтобы интеграл

$$I(C_1, \dots, C_N) = \int_{\Omega} (Au_N - f)^2 d\Omega$$

принимал минимальное значение. Известные необходимые условия экстремума функции  $I(C_1, \dots, C_N)$ , состоящие в равенстве нулю ее частных производных по  $C_k$  ( $k=1, \dots, N$ ), также приводят к линейной алгебраической системе относительно  $C_1, \dots, C_N$ . Этот метод называется *методом наименьших квадратов*. Другими примерами вариационных методов являются методы Ритца и Куранта [4, 8].

3. Пусть  $\psi_1, \dots, \psi_N$  — некоторая система функций. Если потребовать, чтобы

$$\int_{\Omega} \psi_j Au_N d\Omega = \int_{\Omega} \psi_j f d\Omega,$$

то в случае линейного уравнения  $Au = f$  также получим линейную алгебраическую систему для нахождения  $C_1, \dots, C_N$ . В качестве  $\psi_j$  можно взять функции  $\varphi_j$ . Этот метод носит название *метода Бубнова — Галеркина* [4, 8].

Как было отмечено выше, функции  $\varphi_k$  выбираются заранее. Чем должен быть обусловлен выбор этих функций? Отметим следующие к ним требования:

А. Функции  $\varphi_k$  должны быть конструктивно просты, их вычисление не должно быть слишком трудоемким;

Б. При любом выборе  $C_1, \dots, C_N$  приближение  $u_n(x)$  должно удовлетворять краевым условиям;

В. Должна иметься принципиальная возможность такого выбора постоянных  $C_1, \dots, C_N$  (при достаточно большом  $N$ ), чтобы норма разности  $\|u(x) - u_n(x)\|_X$  (в смысле некоторой нормы  $X$  была мала);

Г. Линейные алгебраические системы для отыскания  $C_1, \dots, C_N$ , возникающие в описанных выше методах, должны хорошо решаться (т. е. должны быть хорошо обусловленными [7, 8]).

Об удовлетворении требований А и Б будет сказано в § 2.

Остановимся вначале на требовании В.

Функция  $u(x)$  неизвестна, однако некоторую априорную информацию о ней можно, как правило, получить. Например, теория уравнений с частными производными утверждает, что в ряде случаев, если  $f(x)$  (правая часть уравнения  $Au=f$ ) имеет частные производные до порядка  $k$  включительно, а  $m$  — порядок уравнения  $Au=f$ , то  $u$  имеет производные до порядка  $m+k$  включительно, причем норма любой частной производной (в пространстве  $C(\Omega)$ ) порядка  $m+k$  функции  $u(x)$  не превышает максимальной из норм (в том же пространстве) производных порядка  $k$  правой части  $f(x)$ , умноженной на известную константу. Таким образом,  $u$  принадлежит классу  $Q$  функций, у которых производные порядка  $m+k$  ограничены известной константой.

Сказанное выше приводит нас к еще одной важной проблеме, рассматриваемой в теории приближений: как выбирать такие функции  $\varphi_h$ , чтобы с помощью выражений

$$\sum_{k=1}^N C_k \varphi_k(x) \quad (7)$$

можно было хорошо приблизить любую функцию, принадлежащую заданному классу (например, классу  $Q$ )? (Здесь для простоты известная функция  $\varphi_0(x)$  в формуле (6) перенесена в левую часть равенства и, таким образом, речь идет о приближении функции  $v = u - \varphi_0$ .)

Рассмотрим сформулированную выше проблему с общих позиций.

Пусть  $K \subset X$ , где  $X$  — линейное нормированное пространство,  $L_N$   $N$  — мерное подпространство  $X$ .

Величина

$$E(K, L_N) = \max_{x \in K} \min_{\varphi \in L_N} \|x - \varphi\|_X$$

называется отклонением множества  $K$  от пространства

$L_N$ . (Фиксируем  $x \in K$ , тогда нахождение  $\min_{\varphi \in L_N} \|x - \varphi\|_x$  означает, что мы ищем элементы  $\varphi \in L_N$ , наилучшим образом приближающий  $x$ . Нахождение же максимума по  $x \in K$  означает, что мы ищем тот элемент  $K$ , который хуже всего приближается с помощью элементов пространства  $L_N$ .)

Требуется найти

$$d_N(K) = \min E(K, L_N)$$

по всем  $N$ -мерным подпространствам пространства  $X$  и то пространство  $L_N^*$ , для которого этот минимум достигается. Величина  $d_N(K)$  называется  $N$ -поперечником, по А. Н. Колмогорову, а пространство  $L_N^*$  — экстремальным пространством ( $N$ -поперечник показывает, насколько хорошо в самом лучшем случае можно приблизить любую функцию из данного класса  $K$  с помощью функций вида (7), которые образуют  $N$ -мерное пространство.)

Система функций  $\varphi_k^*(x)$ , для которых пространство функций вида

$$\sum_{k=1}^N C_k \varphi_k^*(x)$$

есть  $L_N^*$ , как раз и представляет ту систему, которая удовлетворяет требованию В.

Приведем некоторые результаты теории приближений, полученные в этом направлении.

Пусть  $\tilde{W}_C^r$  — класс функций  $f$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$  таких, что:

$$а) f^{(i)}(-\pi) = f^{(i)}(\pi) \quad i=0, 1, \dots, r-1;$$

$$б) \|f^{(r)}\|_{C[-\pi, \pi]} \leq 1.$$

Доказано (В. М. Тихомиров), что

$$d_{2N-1}(\tilde{W}_C^r) = d_{2N}(\tilde{W}_C^r) = K_r N^{-r},$$

где  $K_r$  — известные константы Фавара, а экстремальные пространства — это пространства тригонометрических многочленов и пространства сплайнов степени  $r-1$ , о которых пойдет речь в § 3.

Пусть  $\tilde{W}_C^r$  — класс функций на  $[-\pi, \pi]$  таких, что  $\|f^{(r)}\|_{C[-\pi, \pi]} \leq 1$  (без условия а). Тогда, по В. М. Тихомирову,

$$K_r N^{-r} \leq d_{2N-1}(\tilde{W}_C^r) = d_{2N}(\tilde{W}_C^r) \leq [K_r + \alpha_r(N)] N^{-r},$$

где  $\alpha_r(N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

При этом пространство  $L_{2N} = P_r + T_{2N-r}$  (где  $P_r$  — пространство алгебраических многочленов степени  $r$ , а  $T_{2N-r}$  — тригонометрических) является почти экстремальным, т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_{2N}(\tilde{W}_C^r) [E(\tilde{W}_C^r, L_{2N})]^{-1} = 1.$$

Пусть  $\tilde{W}_{L_2}^r$  — класс функций на  $[-\pi, \pi]$  таких, что:

$$а) f^{(i)}(-\pi) = f^{(i)}(\pi) \quad i=0, 1, \dots, r-1;$$

$$б) \|f^{(r)}\|_{L_1[-\pi, \pi]} \leq 1.$$

Тогда, по А. Н. Колмогорову,

$$d_{2N-1}(\tilde{W}_{L_2}^r) = d_{2N}(\tilde{W}_{L_2}^r) = N^{-r},$$

а экстремальное пространство — пространство тригонометрических многочленов.

Пусть  $\tilde{W}_{L_2}^r$  — класс функций на  $[-\pi, \pi]$  таких, что:  $\|f^{(r)}\|_{L_1[-\pi, \pi]} \leq 1$  (без условия а). Тогда, по А. Н. Колмогорову,

$$N^{-r} \leq d_{2N-1}(\tilde{W}_{L_2}^r) = d_{2N}(\tilde{W}_{L_2}^r) \leq N^{-r} [1 + \beta_r(N)],$$

где  $\beta_r(N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  и пространство  $L_{2N} = P_r + T_{2N-r}$  является почти экстремальным.

Таким образом, с точки зрения классической теории приближений нужно в качестве  $\varphi_k(x)$  брать алгебраические полиномы  $x^k$  и тригонометрические  $\sin kx$ ,  $\cos kx$ . Однако нужно, чтобы выполнялось и требование  $\Gamma$ , т. е. чтобы линейные алгебраические системы для нахождения коэффициентов  $C_1, \dots, C_N$  хорошо решались. Коэффициенты  $a_{ik}$  этих систем — это либо линейные комбинации значений функций  $\varphi_k(x)$  и их производных в точках  $x_1, \dots, x_N$ , как в методе коллокации, либо некоторые интегралы от произведений  $\varphi_k \varphi_i$  и их производных, как в методах наименьших квадратов и Бубнова — Галеркина. Для получения хорошего приближения  $N$  нужно брать большим. При этом подсчет  $N^2$  коэффициентов  $a_{ik}$  требует большого времени (особенно в том случае, когда  $a_{ik}$  — интегралы по областям большой размерности). Кроме этого, эти  $N^2$  коэффициентов не удастся разместить в оперативной памяти ЭВМ (эта память обычно невелика), наконец, погрешности в вычислении  $a_{ik}$  при больших  $N$  могут привести к слишком большим погрешностям в вычислении

$C_h$ , так что при увеличении  $N$  общая погрешность  $\|\delta(x)\| = \|u(x) - u_N(x)\|$  в результате не уменьшается, а увеличивается. Практика показывает, что при использовании алгебраических и тригонометрических полиномов  $N$  можно брать, как правило, не больше 100.

Эту трудность можно обойти, если использовать в качестве  $\varphi_h$  функции, которые равны нулю всюду в рассматриваемой области, за исключением небольшой ее части  $\Omega_h$  («локальные» функции). Тогда большая часть коэффициентов  $a_{ih}$  будет равна нулю и при том же объеме оперативной памяти ЭВМ и том же быстродействии  $N$  можно брать гораздо большим (порядка 10000 в настоящее время). Однако взятые наугад «локальные» функции, вообще говоря, не годятся — желательно все же, чтобы с их помощью можно было получить ту же скорость приближения дифференцируемых функций, которую дают наилучшие с точки зрения теории приближений функций алгебраические и тригонометрические функции. Оказывается, такие локальные функции существуют — это сплайны и атомарные функции. О них пойдет речь в § 3 и 4.

## § 2. МЕТОД R-ФУНКЦИЙ

Ф. Энгельс определил математику как науку о количественных отношениях и пространственных формах реального мира, подчеркнув тем самым единство двух ее основных и древнейших начал — аналитического и геометрического. Однако со времен Декарта, положившего начало новому направлению в математике — аналитической геометрии, основное влияние было уделено изучению линий и поверхностей, описываемых заданными уравнениями. Обратная же задача о построении уравнений заданных геометрических объектов фактически не рассматривалась. Между тем именно она часто встречается в прикладной математике, в частности при исследовании температурных, деформационных, силовых, электромагнитных и других физико-механических полей. Об этой задаче и о некоторых других задачах более общего вида будет рассказано в данной главе.

Вместо часто употребляемых многочисленных терминов «линия», «фигура», «поверхность», «тело», «гиперповерхность» и более общих, но длинных терминов «геометрический объект», «точечное множество» будем использовать термин «чертеж». При этом не будет иметь значения, рассматрива-

ются ли геометрические объекты на плоскости  $\mathbf{R}^2$ , в пространстве  $\mathbf{R}^3$  или в  $n$ -мерном пространстве  $\mathbf{R}^n$ .

Простейшим чертежом является точка, и поэтому можно было бы считать чертежом всякое множество точек в  $\mathbf{R}^n$ . Однако при таком общем подходе пришлось бы рассматривать и такие «чертежи», как, например, «множество точек квадрата на плоскости, у которых обе координаты иррациональны» или «множество точек пространства  $\mathbf{R}^3$ , координаты которых удовлетворяют уравнению  $\sin(x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1}) = 0$ », о форме которых можно говорить лишь весьма условно. Осуществление формализации понятия чертежа, исключающей подобного рода «бесформенные» точечные множества, выходит за рамки настоящей работы. Здесь же ограничимся тем, что на интуитивном уровне будем понимать чертеж как «нечто в  $\mathbf{R}^n$ , имеющее форму».

Уточним теперь, что значит «написать уравнение данного чертежа  $L$ ». Формально таким уравнением является

$$f(x) \equiv \inf_{\xi \in L} \|x - \xi\| = 0 \quad (8)$$

где  $\|x - \xi\| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_n - \xi_n)^2}$ . Здесь  $\inf_{\xi \in L} \|x - \xi\|$  есть кратчайшее расстояние от произвольной

точки  $x \in \mathbf{R}^n$  до чертежа  $L$ . Однако такое решение обратной задачи аналитической геометрии вряд ли можно считать удовлетворительным. Дело в том, что в этом уравнении нет информации о самом чертеже  $L$ , она скрыта под его символом  $L$  и содержится где-то в стороне от уравнения (8). Кроме того, нахождение  $\inf \|x - \xi\|$  само по себе является в общем случае трудно выполнимой операцией. Существенно более выгодным в конструктивном отношении является подход, принятый в аналитической геометрии.

Пусть  $f(x) \equiv f(x_1, \dots, x_n)$  есть целая рациональная функция координат  $x_i$  точки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , а  $L$  — множество всех точек пространства  $\mathbf{R}^n$ , в которых  $f(x) = 0$ . Такое множество, следуя принятой традиции, будем называть алгебраическим чертежом. Примерами алгебраических чертежей являются рассматриваемые в курсах аналитической геометрии прямая, окружность, эллипс, гиперболы, парабола в  $\mathbf{R}^2$ , плоскость, сфера, эллипсоид, различные виды параболоидов и гиперboloидов в  $\mathbf{R}^3$ , гиперплоскость, гиперсфера в  $\mathbf{R}^n (n > 3)$ . Названные алгебраические чертежи описываются обычно уравнениями первого или второго порядка. Что же касается уравнений



более высоких степеней, то их рассмотрение, за редким исключением, не выходит за пределы специальной литературы.

Нетрудно заметить, что задание алгебраического чертежа  $L$  с помощью уравнения  $f(x)=0$ , где  $f$  — целая рациональная функция координат точки  $x$ , носит ясно выраженный конструктивный характер. Действительно, для вычисления значения функции  $f(x)$  в произвольной точке  $x$  достаточно выполнить над ее координатами конечное число операций сложения и умножения, после чего легко установить, принадлежит ли данная точка чертежу  $L$  или нет. При этом сам чертеж  $L$  представляет собой совокупность всех тех точек пространства  $\mathbf{R}^n$ , в которых  $f=0$ . Легко видеть, таким образом, что система операций

$$H_0 = \{x + y, xy, \text{const} \in (-\infty, \infty)\}, \quad (9)$$

состоящая из сложения, умножения и констант, вполне определяет как множество  $\mathfrak{M}_0$  всех полиномов, так и множество  $\mathfrak{N}_0$  всех алгебраических чертежей. Чтобы подчеркнуть зависимость этих множеств от системы  $H_0$ , будем их обозначать  $\mathfrak{M}(H_0)$  и  $\mathfrak{N}(H_0)$  соответственно.

Кроме названных линий и поверхностей первого и второго порядка, множество алгебраических чертежей содержит целый ряд других замечательных кривых и поверхностей, многие из которых ввиду их особых свойств называют именами видных ученых. Так, например, кривая третьего порядка, уравнение которой имеет вид

$$x_1^3 + x_2^3 - 3ax_1x_2 = 0,$$

называется декартовым листом; линия, определяемая уравнением

$$x_2^2(2a - x_1) - x_1^3 = 0,$$

— циссоидой Диоклеса и т. д. Однако в целом множество алгебраических чертежей оказывается все же достаточно бедным. Оно не содержит, например, квадрат, синусоиду, усеченный конус, не говоря уже о таких сложных чертежах, как, скажем, поверхности письменного стола или корпуса турбины. Для того чтобы иметь возможность писать уравнения и таких сложных чертежей, необходимо, очевидно, некоторым образом расширить имеющиеся в нашем распоряжении конструктивные средства, которые для алгебраических чертежей исчерпываются базисной системой  $H_0$ .

В некоторых работах используется понятие полуалге-

браического множества (будем говорить «полуалгебраического чертежа»). Полуалгебраическими считаются чертежи, точки которых удовлетворяют конечным системам алгебраических уравнений и неравенств, а также объединения конечного числа таких чертежей. Очевидно, что множество полуалгебраических чертежей (обозначим его  $\mathfrak{A}_1(H_0)$ )

является существенно более широким, чем множество алгебраических чертежей. Множеству  $\mathfrak{A}_1(H_0)$  принадлежат,

например, такие чертежи, как квадрат, ломаная линия, усеченный конус и т. п. Однако то, что при таком подходе полуалгебраические чертежи задаются не единым уравнением вида  $f(x)=0$ , а «системами систем» уравнений и неравенств, является серьезным конструктивным недостатком, который проявляется во многих ситуациях, где требуется осуществить учет геометрической информации на аналитическом уровне. Такие традиционные фразы, применяемые при задании геометрических объектов, как, например, «фигура, ограниченная линиями  $\varphi_1=0, \dots, \varphi_m=0$ », не является, вообще говоря, достаточно удачной. Так, если сказать: «четыреугольник задан уравнениями сторон  $x_1=0, x_2=0; 2x_1+x_2-2=0; x_1+2x_2-2=0$ , то совершенно неясно, какой из двух четырехугольников  $OBCD$  или  $OACE$  (рис. 2) имеется в виду. Ясно, что такое задание нуждается в некоторых дополнительных комментариях (например, что четырехугольник выпуклый), к которым трудно применить формальный математический аппарат.

Возникает вопрос: нельзя ли такие чертежи, как полуалгебраические, задавать одним уравнением, подобно тому как это можно делать для прямых, окружностей, эллипсоидов и тому подобных алгебраических чертежей?

Попробуем решить этот вопрос, идя по пути расширения базисной системы  $H_0 = \{x + y, xy, \text{const}\}$ , которая была использована для построения уравнений алгебраических чертежей.

Пусть  $H = \{H_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  — некоторое расширение базисной системы  $H_0$ . (В качестве системы  $H$  можно, например, взять систему

$$H_e = \{x \pm y; xy; x/y; x^a; a^x (a > 0); \log_a x (a > 0); \sin x;$$

$\cos x; \text{tg } x; \text{ctg } x; \arcsin x; \arccos x; \text{arctg } x; \text{arctg } x; \text{const}\}$ , (10) состоящую из арифметических операций, основных элемен-

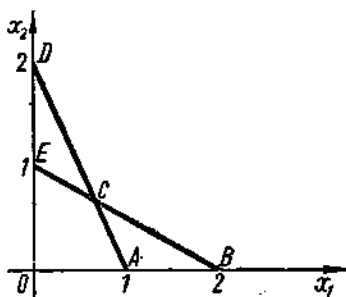


Рис. 2.

тарных функций и констант.) Множество всех функций, которые можно построить с помощью системы  $H$  по правилу образования сложных функций (суперпозиций), обозначим (по аналогии с  $\mathfrak{M}(H_0), \mathfrak{M}(H)$ , а множество соответствующих чертежей, описываемых уравнениями  $f(x)=0; f(x) \in \mathfrak{M}(H)$ , обозначим  $\mathfrak{M}(H)$ . Функции, составляющие  $\mathfrak{M}(H)$ , будем называть  $H$ -реализуемыми функциями, а чертежи из  $\mathfrak{M}(H)$  —

$H$ -реализуемыми чертежами. Кроме того, по аналогии с тем, как было образовано множество  $\mathfrak{M}_1(H_0)$  полуалгебраических чертежей, сформируем множество  $\mathfrak{M}_1(H)$  полу- $H$ -реализуемых чертежей. Множество  $\mathfrak{M}_1(H_\varepsilon)$ , соответствующее системе (10), назовем множеством полуэлементарных чертежей.

Мы видели, что уже множество  $\mathfrak{M}_1(H_0)$  полуалгебраических чертежей является довольно широким, тем более это можно сказать о множестве  $\mathfrak{M}_1(H)$ , соответствующем более широкой, чем  $H_0$ , системе. Например, множество полуэлементарных чертежей включает всякую линию или поверхность, составленную из кусков элементарных линий или поверхностей (т. е. описываемых уравнениями вида  $f(x)=0$ , где  $f(x)$  — элементарная функция).

По аналогии с тем, что было сказано для полуалгебраических чертежей, можно предположить, что и множество  $\mathfrak{M}_1(H_\varepsilon)$  полуэлементарных чертежей является существенно более широким, чем множество  $\mathfrak{M}(H_\varepsilon)$  элементарных чертежей, т. е. что существуют полуэлементарные, но не элементарные чертежи. Однако оказывается, что это не верно: всякий полуэлементарный чертеж является и элементарным! Это означает, что для каждого из таких объектов, как, например, многоугольник, ломаная, усеченный конус с цилиндрическим отверстием и более сложных, таких, как произвольный чертеж машины или стола и т. п.,

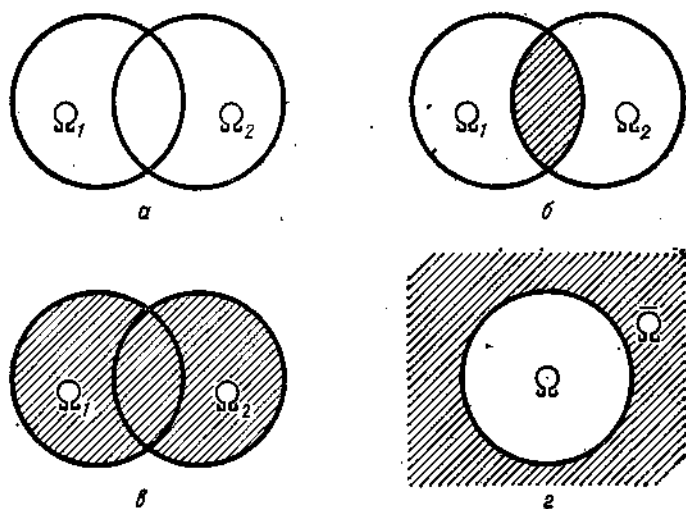


Рис. 3.

можно написать одно элементарное уравнение:  $f(x)=0$ . Более того, функцию  $f(x)$  можно построить так, что она будет заданное число раз непрерывно дифференцируемой везде в  $\mathbf{R}^n$  (и при этом не имеет значения, есть ли у данного чертежа угловые точки, ребра и многие другие особенности!) [16].

В общем случае систему  $H$  будем называть алгоритмически полной, если  $\mathfrak{A}(H) = \mathfrak{A}_1(H)$ . Таким

образом, система  $H_0$  не обладает свойством алгоритмической полноты, а система  $H_8$  обладает. Остается показать, как можно фактически строить уравнения полу- $H$ -реализуемых чертежей, если система  $H$  — алгоритмически полная. Для того чтобы дать ответ на этот вопрос, познакомимся с алгеброй множеств, булевыми функциями и  $R$ -функциями.

Для простоты будем изображать множества в виде областей на плоскости  $\mathbf{R}^2$ . Пусть  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (рис. 3, а) — два таких множества. Множество, состоящее из точек, общих для  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (рис. 3, б), принято называть пересечением  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  и обозначать  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ . Множество, состоящее из точек, вошедших хотя бы в одно из множеств  $\Omega_1$  или  $\Omega_2$ , называется объединением  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (рис. 3, в) и обозначается  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ . Множество  $\bar{\Omega}$ , дополняя-

ющее  $\Omega$  до всей плоскости  $\mathbb{R}^2$  (рис. 3,  $\varepsilon$ ), называется до-  
 полнением  $\Omega$ . Можно было бы ввести и другие та-  
 кого же рода операции над множествами. Это сделало бы  
 язык алгебры множеств более выразительным и более  
 удобным для практического использования, но несущест-  
 венно повлияло бы на идейную сторону изложения мате-  
 риала. (Ситуация здесь аналогична той, которая имеет  
 место при введении основных элементарных функций из  
 $H_{\varepsilon}$ . В принципе можно было бы не вводить символы для  
 таких операций, как, например,  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$ , а пред-  
 ставить их в виде отношения  $\sin x$  и  $\cos x$ , но нетрудно пред-  
 ставить себе, к каким неудобствам практического харак-  
 тера это привело бы.) В данной краткой работе ограничимся  
 приведенными выше операциями над множествами.

Пусть  $\Omega$  — некоторая область. Той же буквой  $\Omega$  обоз-  
 начим функцию:

$$\Omega = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega \\ 0, & \text{если } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Такую функцию принято называть характери-  
 стической функцией, двужначным предикатом  
 множества  $\Omega$ . Для характеристических функций областей  $\bar{\Omega}$ ,  
 $\Omega_1 \cap \Omega_2$  и  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  легко получаем следующие таблицы:

$\Omega$	$\bar{\Omega}$
0	1
1	0

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1 \cap \Omega_2$	$\Omega_1 \cup \Omega_2$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Это примеры так называемых булевых функций (по  
 имени английского математика Д. Буля), в которых каждый  
 из аргументов может принимать значения из множества  
 $B_2 = \{0; 1\}$ , состоящего из двух элементов 0 и 1, и значе-  
 ния этих функций также принадлежат  $B_2 = \{0; 1\}$ . В общем  
 случае всякая булева функция  $n$  аргументов есть отобра-  
 жение вида  $F: B_2^n \rightarrow B_2$ , т. е.  $Y = F(X) = F(X_1, \dots, X_n)$ , где  
 $X_i, Y \in B_2$ .

Функцию, соответствующую пересечению  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ , при-  
 нято называть конъюнкцией и обозначать  $\Omega_1 \wedge \Omega_2$ .  
 Аналогично объединению  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  соответствует дизъ-  
 юнкция  $\Omega_1 \vee \Omega_2$ , а дополнению  $\bar{\Omega}$  — отрица-  
 ние  $\bar{\Omega}$ . В то же время всякой булевой функции  $F(\Omega_1, \dots,$

$\Omega_n$ ) можно поставить в соответствие некоторую область  $\Omega$ , сформированную из областей  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ . Например, булевой функции, заданной таблицей

$\Omega_1$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\Omega_2$	0	0	1	1	0	0	1	1
$\Omega_3$	0	1	0	1	0	1	0	1
$F$	0	0	1	0	0	1	1	1

соответствует область, изображенная на рис. 4. Заметим, что эту же функцию можно задать одной формулой:

$(\Omega_2 \wedge \overline{\Omega_3}) \vee (\Omega_1 \wedge \Omega_3); (\Omega_1 \wedge \Omega_2) \vee (\Omega_1 \wedge \Omega_3) \vee (\overline{\Omega_3} \wedge \Omega_2)$   
и др.

Существуют правила, позволяющие осуществлять тождественные преобразования таких формул, упрощать их. Эти правила похожи на правила обычной алгебры, такие, как коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, но среди них есть и не привычные, например  $\overline{\Omega_1 \wedge \Omega_2} = \overline{\Omega_1} \vee \overline{\Omega_2}$ ;  $\overline{\Omega_1 \vee \Omega_2} = \overline{\Omega_1} \wedge \overline{\Omega_2}$  (правила де Моргана);  $\Omega \wedge \Omega = \Omega$ ;  $\Omega \vee \Omega = \Omega$  (идемпотентность),  $\overline{\overline{\Omega}} = \Omega$  (закон двойного отрицания) и др.

Пусть  $\Omega$  есть область, определяемая неравенством  $\omega(x) \geq 0$ , где  $\omega(x)$  — некоторая функция  $x \in \mathbb{R}^n$ . Соответствующую характеристическую функцию будем обозначать  $\Omega = (\omega(x) \geq 0)$ . (Другими словами, если в некоторой точке  $x$  неравенство выполняется, то выражение в круглых скобках принимается равным 1, в противном случае — 0.)

Располагая некоторой системой  $\Omega_i = (\omega_i(x) \geq 0)$  характеристических функций и булевой функцией  $Y = F(X_1, \dots, X_m)$ , можем построить предикат:

$$\Omega = F(\Omega_1, \dots, \Omega_m) = F[(\omega_1 \geq 0), \dots, (\omega_m \geq 0)], \quad (11)$$

определяющий некоторую область  $\Omega$ , сформированную из областей  $\Omega_i$ , по логическим правилам, определяемым булевой функцией  $F$ .

**Пример.** Область  $\Omega$  (рис. 5) может быть сформирована из областей:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= (x_2 - \sin x_1 \geq 0); \\ \Omega_2 &= (x_1 \geq 0); \\ \Omega_3 &= (\pi^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0); \\ \Omega_4 &= (x_2 - x_1 \pi^{-1} - 1 \geq 0); \end{aligned} \quad (12)$$

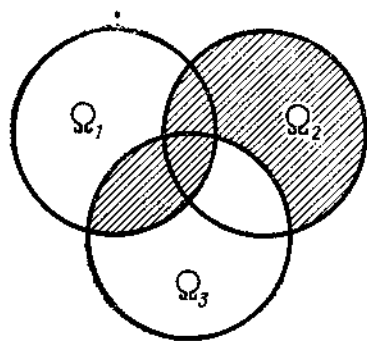


Рис. 4.

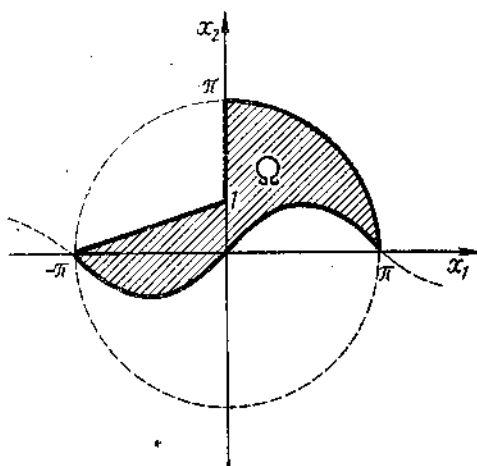


Рис. 5.

по логической формуле

$$\Omega = (\Omega_1 \wedge \Omega_3) \wedge (\Omega_2 \vee \bar{\Omega}_4) = [(x_2 - \sin x_1 \geq 0) \wedge \Lambda (\pi^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0)] \vee [(x_1 \geq 0) \vee (x_2 - x_1 \pi^{-1} - 1 \geq 0)]. \quad (13)$$

Читатель без труда может расширить число примеров, рассматривая различные фигуры или тела, выбирая для них области  $\Omega_i$  и строя логическую формулу  $F$ , аналогичную формуле (13). В общем случае, особенно когда областей  $\Omega_i$  достаточно много, эта задача может оказаться не слишком простой. В решении этого вопроса имеются свои специфические трудности, однако все же предположим, что мы эту задачу уже научились решать.

В принципе формула вида (11) может рассматриваться как некоторый аналитический код соответствующей области  $\Omega$ , а уравнение

$$F[(\omega_1 \geq 0), \dots, (\omega_n \geq 0)] - 1 = 0 \quad (14)$$

— как уравнение области  $\Omega$ . Имеются некоторые прикладные задачи, для которых такое задание областей является вполне приемлемым. Однако наибольший интерес представляет построение уравнений чертежей, в особенности границ областей и граничных участков, в виде  $\omega(x) = 0$ , где  $\omega(x)$  — достаточно «хорошая» (непрерывная,

дифференцируемая и т. п.) функция, заданная единым аналитическим выражением (т. е.  $H$ -реализуемая). Ясно, что левая часть формулы (14), содержащая булевы функции, не удовлетворяет этим требованиям. Ее, например, нельзя продифференцировать, она не стремится к нулю при приближении к границе области, на которой она разрывна, и др.

Тем не менее ниже будет показано, что формулами вида (14) можно воспользоваться как некоторым промежуточным этапом на пути построения уравнений требуемого типа. Осуществить это можно с помощью  $R$ -функций, введенных первым из авторов в 1963 году [16].

Разобьем числовую ось  $\mathbb{R}$  на две равные части:  $(-\infty, 0)$  и  $[0, +\infty)$ . (Для простоты, хотя это и приводит к некоторому нарушению строгости рассуждений, будем считать 0 положительным числом.) Введем обозначения

$$S_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in (0, +\infty) \\ 0, & \text{если } t \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (15)$$

$$S_2(x) = (S_2(x_1), \dots, S_2(x_n)).$$

Функцию  $y=f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  будем называть  $R$ -функцией, если существует такая булева функция  $Y=F(X)$ ,  $X \in B_2^n$ , что

$$S_2[f(x)] = F[S_2(x)], \quad (16)$$

т. е.

$$S_2[f(x_1, \dots, x_n)] = F[S_2(x_1), \dots, S_2(x_n)].$$

Согласно формуле (15) 1 и 0 можно рассматривать как признаки «положительности» и «отрицательности» действительных чисел. Поэтому функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$  следует считать  $R$ -функцией, если ее знак есть некоторая булева функция знаков аргументов. Простейшим примером  $R$ -функции является произведение  $x_1 x_2$ . Действительно, для этой функции получаем таблицу:

$S_2(x_1)$	$S_2(x_2)$	$S_2(x_1 x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Нетрудно проверить, что эта таблица определяет булеву функцию:

$$Y = (\bar{X}_1 \wedge \bar{X}_2) \vee (X_1 \wedge X_2).$$

Для сравнения отметим, что например, функция  $x_1 x_2 + 1$  не является  $R$ -функцией. Знак этой функции не только зависит от знаков аргументов  $x_1$  и  $x_2$ , но и от их абсолютной величины. В дальнейшем нам понадобятся следующие  $R$ -функции:

$$\begin{aligned} x_1 \wedge_0 x_2 &\equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \\ x_1 \vee_0 x_2 &\equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \\ t &\equiv -t, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $t, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , а  $\wedge_0, \vee_0$  — символы операций, смысл которых раскрывается в правой части формул. Первой из них соответствует конъюнкция, второй — дизъюнкция, а третьей — отрицание, т. е.

$$\begin{aligned} S_2(x_1 \wedge_0 x_2) &= S_2(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) = S_2(x_1) \wedge S_2(x_2); \\ S_2(x_1 \vee_0 x_2) &= S_2(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) = S_2(x_1) \vee S_2(x_2); \\ S_2(t) &= \overline{S_2(t)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Покажем теперь, как, пользуясь  $R$ -функциями (17), можно осуществлять переход от формул вида (11) к обычным уравнениям границ соответствующих областей.

Имеет место правило [16]: если в формуле (11), где  $F$  — есть сложная булева функция, построенная с помощью операций  $X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2$  и  $\bar{X}$ , произвести формальную замену символов  $\Omega_i$  на формулы  $\omega_i(x)$ ,  $\wedge$  на  $\wedge_0, \vee$  на  $\vee_0$ , то получим формулу  $\omega(x)$ , такую, что  $\Omega = \{\omega(x) \geq 0\}$ . Т. е. вместо задания области с помощью системы неравенств  $\Omega_i = \{\omega_i(x) \geq 0\}$  и булевой функции  $F(\Omega_1, \dots, \Omega_m)$  приходим к одному неравенству. При этом если исходные функции  $\omega_i(x)$  элементарные, то функция  $\omega(x)$  также элементарная.

В качестве примера рассмотрим область  $\Omega$ , изображенную на рис. 5. Следуя приведенному выше правилу, получаем:

$$\begin{aligned} \Omega = \{[(x_2 - \sin x_1) \wedge_0 (\pi^2 - x_1^2 - x_2^2)] \wedge_0 [x_1 \wedge_0 \\ \wedge_0 (x_2 - x_1 \pi^{-1} - 1)] \geq 0\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнение границы области  $\Omega$  получаем в виде:

$$\omega \equiv [(x_2 - \sin x_1) \wedge_0 (\pi^2 - x_1^2 - x_2^2)] \wedge_0 \wedge_0 [x_1 \vee_0 (x_2 - x_1 \pi^{-1} - 1)] = 0.$$

Символы  $\wedge_0$ ,  $\vee_0$ , присутствующие в записи функции  $\omega$ , могут быть исключены с помощью формул (17). Например, выражение в первой квадратной скобке можно переписать так:

$$[(x_2 - \sin x_1) \wedge_0 (\pi^2 - x_1^2 - x_2^2)] \equiv x_2 - \sin x_1 + \pi^2 - x_1^2 - x_2^2 - \sqrt{(x_2 - \sin x_1)^2 + (\pi^2 - x_1^2 - x_2^2)^2}.$$

Таким образом,  $\omega$  является обычной элементарной функцией. Нетрудно убедиться в том, что функция  $\omega(x)$  непрерывна везде в  $\mathbf{R}^2$  и дифференцируема до любого порядка везде, за исключением угловых точек границы, в которых первые производные разрывны. Можно, однако, написать уравнение этой же линии так, что функция  $\omega(x)$  будет  $m$  раз дифференцируемой. Для этого достаточно воспользоваться следующей системой  $R$ -функций:

$$\begin{aligned} x_1 \wedge_0^m x_2 &\equiv (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{m}{2}}; \\ x_1 \vee_0^m x_2 &\equiv (x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{m}{2}}; \\ \bar{x} &\equiv -x. \end{aligned} \quad (21)$$

В итоге получим:

$$\omega \equiv [(x_2 - \sin x_1) \wedge_0^m (\pi^2 - x_1^2 - x_2^2)] \wedge_0^m [x_1 \vee_0^m (x_2 - x_1 \pi^{-1} - 1)] = 0. \quad (22)$$

Приведенные примеры показывают, что для одного и того же чертежа можно строить различные уравнения и, таким образом, обратная задача аналитической геометрии допускает неединственное решение. Представляет интерес конструктивное задание совокупности («пучка») таких решений. Однако прежде чем рассмотреть этот вопрос, покажем, как можно писать уравнения участков («элементов») границ областей, а затем и произвольных чертежей, представляющих объединение конечного числа таких элементов.

Пусть  $L$  есть некоторый чертеж, имеющий уравнение  $f=0$ , а  $\Omega = [\omega(x) \geq 0]$  — область, которой принадлежит некоторая часть  $L_1$ , чертежа  $L$  (рис. 6). Нетрудно заметить,

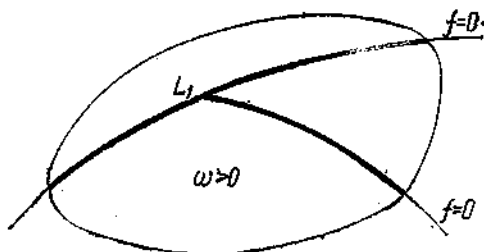


Рис. 6.

что чертеж  $L$  можно задать неравенством  $L = (-f^2 \geq 0)$ , а  $L_1$  — рассматривать как пересечение  $L$  и  $\Omega$ , т. е.  $L_1 = L \wedge \Omega$ . Тогда, следуя основному правилу, как и в приведенном примере, получаем уравнение  $L_1$  в виде:

$$(-f^2) \wedge_0 \omega = 0. \quad (23)$$

Левая часть этого уравнения равна нулю в тех и только тех точках, которые принадлежат  $L_1$ , а в остальных отрицательна. Меняя знак и извлекая квадратный корень, можем из (23) получить также уравнение:

$$\omega_1 = \sqrt{f^2 \vee_0 \omega} = 0. \quad (24)$$

Формула (24) имеет некоторые преимущества перед формулой (23), о которых будет сказано ниже. В формулах (23) и (24) вместо операций  $\wedge_0$  и  $\vee_0$  можно взять операции  $\wedge_0^m$ ,  $\vee_0^m$  или некоторые другие [16].

Пусть  $\omega = 0$  есть уравнение некоторого чертежа  $L$ , а  $A$  — множество везде определенных ограниченных функций. Тогда функция  $u = \omega \Phi$  равняется нулю на  $L$  при произвольном выборе  $\Phi$  в  $A$ . Формулу

$$u = \omega \Phi, \quad \Phi \in A \quad (25)$$

будем называть формулой пучка функций, равных нулю на  $L$ , а функцию  $\Phi$  — неопределенной компонентой пучка. Пучок функций, определяемых формулой (25), будем обозначать  $L(\omega, A)$ . В дальнейшем будем предполагать, что множество  $A$  неопределенных компонент является некоторым линейным функциональным пространством (например, пространством  $C^k$   $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций, пространством  $H^s$  Соболева [2] и т. п.).

Легко убедиться в том, что ширина пучка  $L(\omega, A)$  зависит не только от того, насколько широким является множество  $A$  неопределенных компонент, но и от выбора функции  $\omega$ . Поясним эту мысль на примере. Пусть  $L$  есть окружность радиуса  $R$  с центром в начале координат, для которой построены два различных уравнения:  $\omega_1 \equiv R^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$  и  $\omega_2 \equiv (R^2 - x_1^2 - x_2^2)^2 = 0$ . Предположим, что  $A$  — множество всех целых рациональных функций, а  $A_0$  — множество целых рациональных функций, равных нулю на  $L$ . Тогда  $L(\omega_1, A)$  содержит  $A_0$ , а  $L(\omega_2, A)$  не содержит. Например, не существует такого полинома  $\Phi$ , чтобы

$$(R^2 - x_1^2 - x_2^2)^2 \Phi \equiv R^2 - x_1^2 - x_2^2.$$

Вопрос, который мы только что затронули, в общем случае является весьма сложным, так как его решение существенно зависит не только от свойств функции  $\omega$ , но и от геометрии чертежа  $L$ .

Рассмотренный пример показывает, что более широкий пучок функций получается, если функция  $\omega$  имеет в точках чертежа  $L$  нули первого порядка, или, точнее говоря, если  $\frac{\partial \omega}{\partial \nu} \neq 0$  на  $L$ , где  $\nu$  — направление нормали к  $L$ .

Функцию  $\omega(x)$ , для которой выполняется условие

$$\frac{\partial \omega}{\partial \nu} \Big|_L = 1 \quad (26)$$

в точках, где направление  $\nu$  определено, будем называть нормализованной на  $L$ . Соответствующее уравнение  $\omega=0$  будем называть нормализованным уравнением  $L$ .

Метод  $R$ -функций позволяет строить нормализованные уравнения сложных чертежей без серьезных конструктивных затрат. Один из наиболее употребительных методов состоит в следующем. Для простейших чертежей, таких, как прямая, плоскость, окружность и другие линии и поверхности постоянной кривизны, нормализация осуществляется умножением на некоторые постоянные множители. Например, известное, нормальное уравнение прямой

$$x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha - p = 0,$$

которое получается из общего уравнения  $Ax_1 + Bx_2 + C = 0$  умножением на  $(A^2 + B^2) \operatorname{sign}(-C)$ , является нормализованным. Нормализованное уравнение окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат может быть написано в виде:

$$\frac{1}{2R} [R^2 - (x_1 - a)^2 - (x_2 - b)^2] = 0.$$

В других случаях нормализацию можно провести за счет подходящего выбора функционального множителя. Например, нормализованное уравнение синусоиды  $x_2 - \sin x_1 = 0$  можно написать в виде:

$$(x_2 - \sin x_1)(1 + \cos^2 x_1)^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Оказывается, что если система функций  $\omega_i(x)$ , входящих в опорные неравенства (например, в (2)), нормализована, то при использовании системы (17)  $R$ -функций нормализованной окажется и функция  $\omega(x)$ , соответствующая сложному чертежу  $\Omega$ .

Заметим, что использование системы  $R$ -функций (21) приводит к нарушению нормализованности  $\omega(x)$ . Таким образом, чтобы вместо (22) получить нормализованное уравнение границы области  $\Omega$  (рис. 5), возьмем в качестве опорных неравенства:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= [(x_2 - \sin x_1)(1 + \cos^2 x_1)^{-\frac{1}{2}} \geq 0]; \\ \Omega_2 &= (x_1 \geq 0); \\ \Omega_3 &= [2^{-1}\pi^{-1}(\pi^2 - x_1^2 - x_2^2) \geq 0];\end{aligned}\tag{27}$$

$$\Omega_4 = [\pi(1 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}}(x_2 - x_1\pi^{-1} - 1) \geq 0].$$

Нормализованное уравнение получим в виде:

$$\omega \equiv [(x_2 - \sin x_1)(1 + \cos^2 x_1)^{-\frac{1}{2}} \wedge_0 2^{-1}\pi^{-1}(\pi^2 - x_1^2 - x_2^2) \wedge_0 (x_1 \geq 0) \wedge_0 \pi(1 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}}(x_2 - x_1\pi^{-1} - 1)] \wedge_0\tag{28}$$

$$\wedge_0 [x_1 \vee_0 \pi(1 + \pi^2)^{-\frac{1}{2}}(x_2 - x_1\pi^{-1} - 1)] = 0.$$

Сравнивая (22) с (28), видим, что для нормализации уравнения (22) в нем потребовалось произвести лишь незначительные изменения. Аналогичным свойством сохранять нормализованность опорных функций обладает формула (24). Если в этой формуле функция  $\omega$  нормализована, то нормализованной будет и функция  $\omega_1$  (заметим, что все эти утверждения не относятся к угловым и другим особым точкам чертежей). Вопрос о характере поведения функции  $\omega$  в таких точках требует специального рассмотрения).

Пусть теперь  $L_i = [\omega_i(x) = 0]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , есть некоторая система чертежей, а  $L$  — их объединение. Тогда уравнение  $L$  можно написать в виде:

$$\omega(x) \equiv \prod_{i=1}^m \omega_i(x) = 0. \quad (29)$$

Если необходимо, чтобы функция  $\omega(x)$  была нормализованной, то можно воспользоваться формулой:

$$\begin{aligned} \omega(x) &\equiv \bigwedge_{i=1}^m \omega_i(x) \equiv \\ &\equiv (\dots((\omega_1 \wedge_0 \omega_2) \wedge_0 \omega_3) \wedge_0 \dots) \wedge_0 \omega_m = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Таким образом, имеются простые алгоритмы построения уравнений чертежей, ранее названных полуэлементарными, которые составлены из кусков известных линий или поверхностей. При этом можно строить бесчисленное множество таких уравнений, изменяя неопределенную компоненту  $\Phi$  пучка (25) функций, равных нулю на  $L$ .

Обратим теперь внимание на прикладную значимость формулы (25). Рассмотрим две задачи из области механики. Первая задача — о чистом кручении стержня с поперечным сечением  $\Omega$ . Эта задача сводится [16] к отысканию решения уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2 = 0, \quad (31)$$

удовлетворяющего на границе  $L$  области  $\Omega$  условию

$$u|_L = 0. \quad (32)$$

Вторая задача — о защемленной свободно опертой по контуру пластинке, имеющей форму области  $\Omega$ , подверженной поперечной нагрузке  $q$ . В этой задаче необходимо найти решение уравнения Софи Жермен:

$$D \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right) = q, \quad (33)$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость пластинки, удовлетворяющая на  $L$  условиям:

$$u|_L = 0; \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \Big|_L = 0, \quad (35)$$

где  $\mu_0$  — коэффициент Пуассона,  $v$  и  $\tau$  — направления нормали и касательной к  $L$ .

Мы видим, что и в одной и в другой задаче искомая функция  $u$  должна на  $L$  быть равной нулю. Однако решения

этих двух задач различны. Более того, если во второй задаче изменять  $D$ ,  $\mu_0$  и  $q$ , то будем получать, вообще говоря, различные решения  $u$ . Естественно предположить, что во всех этих случаях функция  $u$  содержится среди функций пучка  $u = \omega\Phi$ , где  $\omega(x) = 0$  — уравнение  $L$ . Если такое предположение справедливо, то будем говорить, что пучок  $u = \omega\Phi$  полный. Можно говорить также о полноте пучка  $u = \omega\Phi$  в некотором смысле, имея в виду возможность находить среди функций пучка достаточно хорошие приближения искомым функциям в смысле той или иной нормы или метрики. Строгое исследование этих вопросов в общем случае представляет собой сложную задачу [16]. Здесь в первую очередь следует отметить исследования Л. В. Канторовича, которому принадлежит сама постановка проблемы, И. Ю. Харрик и других авторов.

Рассмотренная выше задача о построении пучка функций, равных нулю в точках заданного чертежа  $L$ , является частным случаем более общей задачи о построении пучка функций, принимающих в точках  $L$  заданные (вообще говоря, не нулевые) значения. Чтобы придать этой задаче конструктивный характер, предположим, что значения функции  $u$  на чертеже  $L$  определяются формулами:

$$u|_L = \varphi_i |_{L_i}, \quad (36)$$

где  $\varphi_i$  — заданные везде определенные функции ( $H$  — реализуемые, а  $L_i$  — части (элементы) чертежа  $L$  с уравнениями  $\omega_i = 0$ ). Формула для пучка функций, удовлетворяющих условиям (36), может быть написана в виде:

$$u = \frac{\varphi_1 \omega_1^{-1} + \dots + \varphi_m \omega_m^{-1}}{\omega_1^{-1} + \dots + \omega_m^{-1}} + \omega\Phi. \quad (37)$$

Этой формулой можно воспользоваться для аппроксимации решений краевых задач, в которых вместо однородных условий вида (32), (34) имеются условия вида (36).

Пусть, например,  $L = (R^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0)$  есть окружность в  $R^2$ ,  $L_1$  и  $L_2$  — соответственно левая и правая ее половины,  $\varphi_1 = \sin(x_1 x_2)$ ,  $\varphi_2 = x_1 + x_2$ .

Согласно формуле (23) получаем:

$$L_1 = \{(R^2 - x_1^2 - x_2^2)^2 \nabla_0 x_1 = 0\};$$

$$L_2 = \{(R^2 - x_1^2 - x_2^2)^2 \nabla_0 x_2 = 0\}.$$

Тогда

$$u = \frac{\sin(x_1, x_2) \left[ (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \nabla_0 x_1 \right]^{-1} + (x_1 + x_2) \left[ (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \wedge_0 x_1 \right]^{-1}}{\left[ (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \nabla_0 x_1 \right]^{-1} + \left[ (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \nabla_0 x_1 \right]^{-1} + (R^2 - x_1^2 - x_2^2) \Phi} +$$

Дальнейшее расширение понятия пучка приводит нас к граничным условиям более сложного вида, которые могут, например, иметь дифференциальный характер, быть различными на разных участках чертежа  $L$  и т. п. Метод  $R$ -функций позволяет строить пучки функций для широких классов таких условий, в том числе и нелинейных. Конечно, и в этом случае одним из основных вопросов остается полнота пучков. Например, для краевого условия

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \Phi(x) \text{ на } L, \quad (38)$$

которое принято назвать условием Неймана, может быть предложена следующая формула:

$$u = \Phi_1 - \omega \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} \frac{\partial \omega}{\partial x_3} \right) + \omega \Phi + \omega^2 \Phi_2, \quad (39)$$

где  $\omega=0$  — нормализованное уравнение  $L$ , а  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — неопределенные компоненты пучка (38), соответственно дважды и один раз дифференцируемые. Если подставить (39) в (38), то независимо от выбора функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  в указанных множествах получим тождество.

Вид пучка зависит, естественно, от вида краевых условий. Например, для смешанных условий

$$u|_{\partial \Omega_1} = \Phi_1; \quad (40)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega_2} = \Phi_2, \quad (41)$$

где  $\partial \Omega_1$  и  $\partial \Omega_2$  — участки границы  $\partial \Omega$ , описываемые уравнениями  $\omega_1=0$  и  $\omega_2=0$  соответственно, пучок функций можно написать в форме:

$$u = \Phi_1 + \omega_1 \Phi_1 + \frac{\omega_1 \cdot \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \left[ \Phi_2 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} - \frac{\partial(\omega_1 \Phi_1)}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial(\omega_1 \Phi_1)}{\partial x_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} - \frac{\partial(\omega_2 \Phi_1)}{\partial x_3} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} + \omega_2 \Phi_2 \right], \quad (42)$$



причем функция  $\omega_2$  предполагается нормализованной, т. е. удовлетворяющей условию (26).

В общем случае пучок функций, удовлетворяющих некоторой системе краевых условий, например условиям (4), имеет вид:

$$u = B(\Phi, \omega, \omega_i), \quad (42)$$

где  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  — неопределенная компонента (вектор-функция) пучка;  $\omega = 0$  и  $\omega_i = 0$  — уравнение границы  $\partial\Omega$  и ее участков  $\partial\Omega_i$ . Оператор  $B$  должен быть построен так, чтобы условия на заданном чертеже  $L$  удовлетворялись независимо от выбора  $\Phi$  (в некотором широком множестве).

Однако одного лишь удовлетворения краевым условиям на  $L$  недостаточно, чтобы формулой (42) можно было воспользоваться в приложениях, например, при решении краевых задач. Поясним эту мысль на примерах. Предположим, что необходимо решить задачу о кручении стержня, поперечное сечение которого имеет вид области  $\Omega$ , изображенной на рис. 5. Как уже отмечалось, эта задача сводится к отысканию решения уравнения Пуассона (31), удовлетворяющего краевому условию (32). Нетрудно заметить, что краевое условие (32) будет удовлетворяться, если положить

$$u = (x_2 - x_1 \pi^{-1} - 1)(x_2 - \sin x_1)x_1(\pi^2 - x_1^2 - x_2^2)\Phi, \quad (43)$$

причем  $\Phi$  может быть произвольной ограниченной функцией. Однако воспользоваться формулой (43) для решения указанной задачи о кручении стержня нельзя. Дело в том, что функция (43) равняется нулю не только на границе области  $\Omega$ , что требуется по условию задачи, но и на продолжениях прямых  $x_1 = 0$  и  $x_2 - x_1 \pi^{-1} - 1 = 0$  внутри области  $\Omega$ . Таким образом, на этих участках прямых искомому решению заведомо навязаны нулевые значения. Между тем точное решение внутри области  $\Omega$  строго положительно, что легко устанавливается с помощью принципа максимума [4]. Из изложенного выше следует, что пучок (43) является недостаточно представительным, или, как принято говорить, не обладает свойством полноты. В то же время если воспользоваться формулой (25), в которой взять функцию  $\omega$  в виде (20), то полученный пучок будет обладать требуемым свойством полноты.

В приведенной выше простейшей задаче Дирихле сравнительно просто решить вопрос о том, является рассматриваемый пучок  $u = \omega\Phi$  полным или нет. Более сложно ис-

следовать этот вопрос в задачах с краевыми условиями дифференциального вида. Здесь уже неполнота пучка может проявляться в навязывании искомому решению некоторых других характеристик. Рассмотрим, например, формулу (39), положив в ней  $\Phi_1 \equiv 0$ . Тогда получим формулу пучка

$$u = \omega\varphi + \omega^2\Phi_2. \quad (44)$$

Эта формула также удовлетворяет краевому условию (38).

Однако при этом будет также выполняться условие  $u_{\partial\Omega} = 0$ , чего, вообще говоря, не должно быть. Таким же образом можно удовлетворить краевым условиям (34), (35) для свободно опертой пластинки, полагая  $u = \omega^3\Phi$ . Но, в этом случае, кроме условий (34), (35), будет также выполняться условие

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

характерное для защемленной по контуру пластинки.

Приводя все эти примеры, мы подчеркиваем важность построения таких пучков функций, которые обладали бы свойствами полноты. Если такой пучок построен для некоторой краевой задачи, то его естественно назвать *структурной формулой* или *структурой* [16]. Метод  $R$ -функций представляет собой единый подход к построению структурных формул для краевых условий различных типов (в том числе и нелинейных).

Важной особенностью метода  $R$ -функций является его гибкость с точки зрения автоматизации программирования при решении краевых задач. Это видно, например, из того, что если структура вида (42) для некоторой краевой задачи построена, то изменение геометрии области связано лишь с изменением функций  $\omega$  и  $\omega_i$ , которые легко строятся методами, описанными в данном параграфе. Немаловажным обстоятельством является то, что функции  $\omega$  и  $\omega_i$  могут строиться в зависимости от буквенных параметров, характеризующих геометрию области, таких, как ширина, длина, глубина врезов, радиусы закруглений и т. п. Это позволяет строить стандартные программы для типовых профилей, широко встречающихся в инженерной практике.

В Институте проблем машиностроения АН УССР на основе метода  $R$ -функций разработаны автоматизированные системы программирования серии «Поле» для ЭВМ БЭСМ-6, позволяющие в десятки и сотни раз сократить время на программирование, обычно затрачиваемое программистами

при решении тех же задач. При этом для отыскания неопределенных компонент используются методы теории приближений и, в частности, теории сплайнов и атомарных функций, о которых пойдет речь в следующих параграфах.

### § 3. СПЛАЙНЫ

Как уже отмечалось выше, на практике очень часто встречается следующая задача интерполяции: изучается некоторая величина, которая является функцией некоторых параметров (например, координат и времени). Эта величина известна для некоторых значений параметров. Требуется указать алгоритм, по которому ее можно вычислять при других значениях с достаточной точностью. Таким алгоритмом, например, может быть формула, подстановка в которую интересующих параметров дает с хорошим приближением искомое значение функции. Пусть, например, в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_N$  функция принимает значения  $f_1, f_2, \dots, f_N$  (рис. 7). Требуется через эти заданные точки провести кривую, которая была бы близкой к неизвестной нам кривой — графику исследуемой функции. Функция  $g(t)$ , которая в точках  $t_1, t_2, \dots, t_N$  принимает те же значения  $f_1, f_2, \dots, f_N$ , как и функция  $f(t)$ , называется интерполирующей  $f(t)$  в точках  $t_1, t_2, \dots, t_N$ . Часто в качестве интерполирующей функции используют алгебраические многочлены, а при интерполяции периодических функций — многочлены тригонометрические. Однако математики установили следующий факт: многочлен, интерполирующий непрерывную функцию (например,  $|x|$ ), может к ней не стремиться при  $N \rightarrow \infty$ . По этому поводу академик С. Н. Бернштейн в 1905 г. писал: «Отмеченному выше теоретическому обстоятельству соответствует практически важный факт, что незаметное изменение экспериментальных данных ведет к значительному изменению приближающего многочлена в некоторых промежуточных точках. В действительности практики предпочитают пользоваться для приближенного представления своих функций ломаными линиями, вершинами которых служат экспериментально определенные точки. Ясно, что этот последний метод интерполирования позволяет представить функцию с той точностью, какую доставляют прямые измерения». Далее С. Н. Бернштейн указывает аналитическую формулу для этой ломаной. Функции, графики которых — ломаные ли-

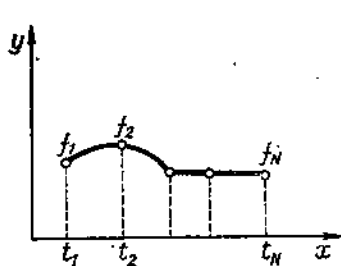


Рис. 7.

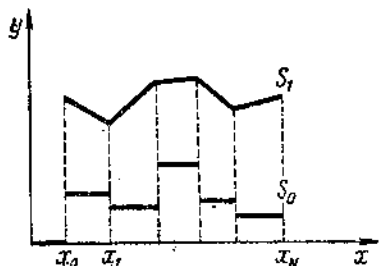


Рис. 8.

нии — и есть частный случай сплайнов. Это сплайны первой степени. Однако для приложений их оказалось недостаточно. В самом деле, очень часто изучаемая функция должна быть гладкой из физических соображений, т. е. у нее должны существовать одна или несколько производных. Сплайн первой степени, однако, в точках излома не имеет производной. Поэтому стали использовать сплайны более высокой степени — функции, составленные из «кусочков» многочленов данной степени, которые состыкованы так, чтобы получившаяся функция была непрерывной и обладала несколькими непрерывными производными. Происхождение термина «сплайн» в книге [1] объясняется так: «В течение многих лет чертежники использовали длинные тонкие рейки из дерева или какого-либо другого материала в качестве лекал; проводя с их помощью плавные кривые через заданные точки. Эти рейки, или сплайны, закрепляют на месте, подвешивая к ним в некоторых точках свинцовые грузила. Изменяя положение точек, в которых подвешиваются грузила, а также положение сплайна и грузил, при достаточном числе грузил можно добиться, чтобы сплайн проходил через заданные точки». Оказывается, что при незначительных изгибах упругой рейки ее положение можно задать кусками кубических парабол, состыкованных в точках прикрепления грузил до второй производной включительно.

По определению, сплайн степени  $n$  на сетке  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  — это такая функция  $S(x)$ , что  $S^{(n-1)}(x)$  — непрерывна, а  $S^{(n)}(x) = b_i$  на каждом интервале  $(x_i, x_{i+1})$ . Отсюда следует, что на каждом интервале  $(x_i, x_{i+1})$  сплайн  $S(x)$  — многочлен степени не выше  $n$ . Сплайн нулевой степени — это кусочно-постоянная

функция, сплайн первой степени — непрерывная ломаная и т. д. (рис. 8). Наиболее употребительны сплайны третьей степени — кубические сплайны. Систематическое изучение сплайнов предпринял Шёнберг, начиная с 1946 г. Сплайны привлекли внимание многих математиков после того, как Холледей в 1957 г. установил следующее интересное свойство сплайнов: пусть задана сетка

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  и числа  $y_0, \dots, y_N$ .

Тогда среди всех функций  $f(x)$ , имеющих непрерывную вторую производную  $f''(x)$  и принимающих в точках  $x_i$  значения  $y_i$ , кубический сплайн на данной сетке  $S(x)$  такой, что  $S''(a) = S''(b) = 0$  доставляет минимум интегралу

$$\int_a^b |f''(x)|^2 dx.$$

Это свойство часто называют свойством минимальной кривизны (поскольку при малой производной  $f'(x)$  вторая производная  $f''(x)$  близка к кривизне). Кстати, сплайны как экстремальные функции появлялись (хотя тогда еще и не было термина «сплайн») при решении ряда важных задач и ранее (Фавар, 1936; А. Н. Колмогоров, 1939; С. М. Никольский, 1946 [5, 19]).

Основной недостаток многочленов как аппарата приближений состоит в том, что их поведение в окрестности какой-либо точки определяет их поведение в целом [6, 17]. Поэтому если приближаемая функция на разных участках ведет себя по-разному, например, на одном участке близка к постоянной, затем круто убывает или возрастает и т. д., многочлены не дают хороших результатов. Сплайн же можно изменить на одном участке, не меняя его на остальной части. Точнее, любой сплайн степени  $n$  на данной сетке можно представить в виде:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{N+m} C_k \varphi_{k,m}(x),$$

где  $\varphi_{k,m}(x)$  — некоторый сплайн степени  $n$  ( $B$  — сплайн Шёнберга), не равный нулю только на отрезке  $(x_{k-n}, x_{k+1})$ . Поэтому, изменяя одно из  $C_k$ , мы изменяем сплайн  $S(x)$  только на отрезке  $(x_{k-n}, x_{k+1})$ . Для того случая, когда сетка равномерная т. е.  $x_j = jN^{-1}(b-a) + a$ , функции  $\varphi_{k,m}(x)$  имеют наиболее простой вид — они есть сдвиги сжатий функции:

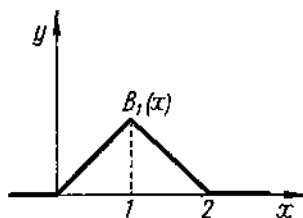


Рис. 9.

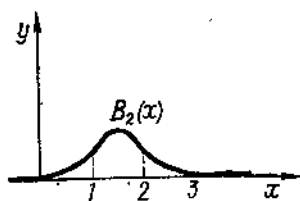


Рис. 10.

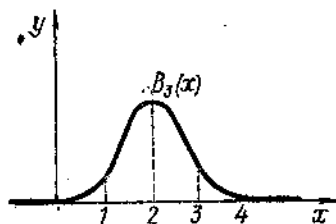


Рис. 11.

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^k (x-k)_+^n,$$

где

$$x_+^n = \begin{cases} x^n & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Графики функций  $B_1(x)$ ,  $B_2(x)$ ,  $B_3(x)$  показаны на рис. 9—11. Часто вместо функций  $B_n(x)$  используют функции  $\theta_n(x)$ :

$$\theta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left( \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right)^{n+1} dt,$$

которые связаны с  $B_n(x)$  очень просто:

$$\theta_n(x) = \alpha_n B_n \left( x + \frac{n+1}{2} \right),$$

а удобны тем, что они четны и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(x) dx = 1.$$

Для  $n = 3$  функция  $\theta_3(x)$  задается так:

$$\theta_3(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 2; \\ (2 - |x|)^2/6 & 1 \leq |x| \leq 2; \\ (1 + 3(1 + |x|) + 3(1 - |x|)^2 - 3(1 - |x|)^3)/6; & |x| \leq 1. \end{cases}$$

В. М. Тихомиров показал, что для класса  $\tilde{W}_c^r$  пространство сплайнов степени  $r - 1$  на равномерной сетке является экстремальным подпространством, т. е. приближает функции этого класса так же хорошо, как и тригонометрические полиномы. Причем, наилучший способ приближения класса  $\tilde{W}_c^r$  сплайнами степени  $r - 1$  — это интерполяция в равноотстоящих узлах. Интерполяция же данной функции требует только знания (вычисления) значений этой функции в точках интерполяции. В то же время наилучший метод приближения функций класса  $\tilde{W}_c^r$  — метод Фавара — требует вычисления коэффициентов Фурье функции  $f(x)$ , т. е. интегралов вида:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx; \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

для точного (или достаточно точного) вычисления которых требуется, вообще говоря, вычисление  $f(x)$  в гораздо большем числе точек, а также много времени. К тому же если функция задана только в виде таблицы, эти трудности приближения тригонометрическими полиномами только усугубляются. Если интерполировать функцию класса  $\tilde{W}_c^r$  с помощью  $2N$ -мерного пространства сплайнов степени  $r - 1$ , то погрешность интерполяции не превышает  $CN^{-r}$ . Если же эту функцию интерполировать с помощью  $(2N - 1)$ -мерного пространства тригонометрических полиномов степени  $N - 1$ , то погрешность будет, вообще говоря, порядка  $CN^{-r} \ln N$ , т. е. в  $\ln N$  раз больше. Поэтому, в частности, коллокация с использованием тригонометрических полиномов, не считается хорошим методом, а коллокация с помощью сплайнов дает хорошие результаты. При этом, используя, скажем, кубические  $B$ -сплайны, приходится решать линейную алгебраическую систему с трехдиагональной матрицей, весьма похожей на матрицы, возникающие в разностных схемах, для решения которых разработаны хорошие и простые методы (например, метод прогонки). Вычисление интерполирующих кубических сплайнов на равномерной сетке удобно проводить по схеме Б. У. Носино-

вой [9]. Сплайны тесно связаны с широко используемым в последнее время методом конечных элементов, который с успехом применяется для решения самых сложных задач в различных областях науки и техники [2, 3]. Академик Н. Н. Яненко отмечает: «Успех в обосновании этой методики (метода конечных элементов) был обеспечен прежде всего достижениями в области теории сплайнов... Метод конечных элементов можно рассматривать как специальный случай метода Рунца — Галеркина. Этот классический подход имеет два существенных недостатка. Во-первых, на практике построение базисных функций возможно только для некоторых специальных областей и, во-вторых, соответствующие матрицы Рунца — Галеркина являются полными матрицами и очень часто даже для простых задач плохо обусловлены. Принципиальное различие между методом конечных элементов и классической техникой Рунца — Галеркина лежит в построении базисных функций. В методе конечных элементов базисные функции выбираются в виде сплайнов и для областей общего вида могут быть вычислены весьма просто». Отметим, что первый недостаток метода Рунца — Галеркина легко устраняется с помощью методов, описанных в § 2 настоящей работы, однако второй недостаток, по-видимому, можно преодолеть только с помощью использования локальных базисных функций типа сплайнов или атомарных функций. Сплайны оказались полезными и в другом наиболее употребительном методе решения краевых задач — разностном методе. Решение исходной задачи в разностном методе обычно представляется в виде приближенных значений искомой функции. Эти значения надо проинтерполировать на всю область. Для этой цели очень удобно использовать интерполяцию сплайнами. Однако поскольку значения неизвестной функции в данных точках известны с некоторой погрешностью, иногда не имеет смысла строить интерполяционный сплайн. «Следует построить функцию, которая проходила бы вблизи заданных значений более «плавно», чем интерполяционная», — отмечает академик Г. И. Марчук.

Это — задача построения «сглаживающей» функции. Оказывается, и в задаче «сглаживания», сплайны оказываются наилучшими. Нужно отметить, что в настоящее время слово «сплайн» относится не только к функциям, описанным в начале этого параграфа. Эти функции теперь называют «обыкновенными полиномиальными сплайнами



дефекта 1». Изучаются и применяются различные обобщенные сплайны. К ним относятся, например, так называемые  $L$ -сплайны. Пусть  $L$  — линейный дифференциальный оператор порядка  $m$ :

$$Lu(x) = \sum_{j=0}^m C_j(x) D^j u(x); \quad D^j = \left(\frac{d}{dx}\right)^j.$$

Тогда  $L$ -сплайн на отрезке  $(a, b)$  — это функция  $\omega(x)$  такая, что

$$\begin{aligned} L^*L\omega(x) &= 0 \text{ на } (x_i, x_{i+1}); \\ D^k\omega(x_i^-) &= D^k\omega(x_i^+) \text{ для } 0 \leq k \leq p < 2m, \end{aligned}$$

где

$$L^*v = \sum_{j=0}^m (-1)^j D^j (C_j(x) v(x)), \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

Это значит, что  $\omega(x)$  составлена из кусков, каждый из которых — решение уравнения  $L^*Lu = 0$ . В частности, если  $L = D^m$ ,  $p = 2m - 2$ , то приходим к обыкновенным полиномиальным сплайнам степени  $2m - 1$ , если  $L = D^2 + K^2$ , то сплайн будет составлен из тригонометрических полиномов и т. п. Выше приводилась оценка приближения периодических функций класса  $\tilde{W}_C^r$  с помощью интерполирующих сплайнов на равномерной сетке. Если приближаемая функция не периодична, например, если мы рассматриваем приближения функций класса  $W_C^r$ , то, как показал В. М. Тихомиров, интерполяция полиномиальными сплайнами степени  $r - 1$  также наилучшая (с точки зрения колмогоровских поперечников), однако сплайны нужно брать уже не на равномерной сетке, а на некоторой другой и интерполировать нужно не в равноотстоящих узлах, а в каких-то других. Подведем некоторые итоги. С точки зрения приближения классов  $\tilde{W}_C^r$ ,  $W_C^r$  сплайны не уступают полиномам. Более того, наилучший метод приближения сплайнами — интерполяция — отличается большой простотой. С точки зрения применений сплайны обладают еще одним огромным преимуществом — среди сплайнов есть локальные, не равные нулю только на малом промежутке, со всеми вытекающими из этого последствиями, описанными в конце § 1. Правда, функции класса  $\tilde{W}_L^r$  лучше всего приближаются тригонометрическими полиномами, наилучший метод приближения при этом — в качестве приближающей функцию  $f(x)$  многочлена взять сумму  $n$

членов ряда Фурье функции  $f(x)$ . Однако и здесь у сплайнов есть свои преимущества. Сплайн, лучше всего приближающий функцию  $f(x)$  по норме  $L_2$ , хорошо приближает ее и в норме  $C$ . Сумма же  $n$  членов тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x)$ , приближая  $f(x)$  наилучшим образом в норме  $L_2$ , в норме  $C$  дает в  $\ln n$  раз худшее приближение, чем наилучшее. Недостаток сплайнов следующий: тригонометрические многочлены являлись экстремальным пространством для  $\tilde{W}_C^r$  при всех натуральных  $r$ , а экстремальным сплайн — пространством для  $\tilde{W}_C^r$  является пространство сплайнов степени  $r - 1$ . При разных значениях  $r$  нужно брать сплайны разной степени. А если мы не знаем, сколько непрерывных производных есть у нашей неизвестной функции, неясно, сплайны какой степени нужно использовать. Многочленам же все равно, сколько производных есть у неизвестной функции, какова ее гладкость, — многочлены любую функцию могут приближать так хорошо, насколько это возможно. Однако не следует слишком пессимистично смотреть на сплайны. Ясно вполне, что после появления теории интерполяции сплайнами уже нельзя в курсах прикладной математики, читаемых во многих вузах, ограничиваться только интерполяцией многочленами.

Подчеркнем, что никакой непреодолимой пропасти между многочленами и сплайнами нет. При изучении приближений класса  $\tilde{W}_C^r$  тригонометрическими многочленами важную роль играет элемент  $\tilde{W}_C^r$  — функция  $\varphi_{n,r}(x)$ , хуже всего приближающаяся среди всех функций класса  $\tilde{W}_C^r$ . Не случайно это сплайн степени  $r$  на равномерной сетке. Возникает естественный вопрос, можно ли указать такие приближающие функции, которые обладали бы локальностью и универсальностью с точки зрения теории приближений. Ответ на этот вопрос содержится в § 4.

## § 4. АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Финитной функцией называется функция, обращающаяся в нуль вне некоторого конечного интервала, который называется ее носителем. Атомарная функция, по определению, — это финитная функция, которая является решением функционально-дифференциального уравнения вида:

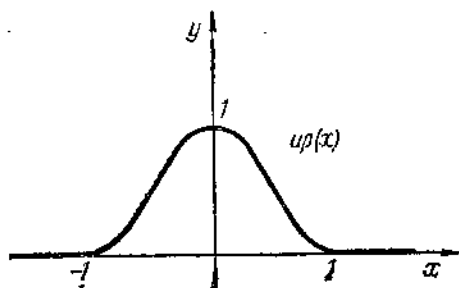


Рис. 12.

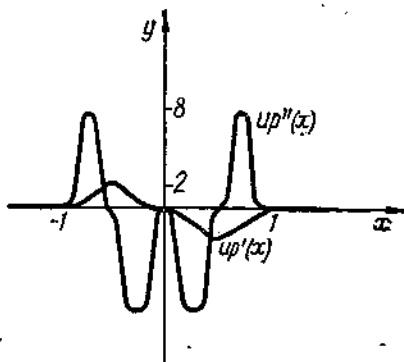


Рис. 13.

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = \sum_{k=1}^M b_k y(ax - C_k), \quad (45)$$

где  $|a| > 1$ .

Все атомарные функции бесконечно дифференцируемые, но не аналитические, т. е. обладают гладкостью меньшей, чем многочлены, но большей, чем сплайны. Наиболее простая и важная атомарная функция — функция  $up(x)$  (рис. 12).

$$up(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t 2^{-k}}{t 2^{-k}} dt,$$

которая является решением уравнения

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1).$$

Носитель функции  $up(x)$  — отрезок  $[-1, 1]$ . Производная горбообразной функции  $up(x)$  состоит из «горба» (там, где  $up(x)$  возрастает) и «ямы» (там, где  $up(x)$  убывает), причем «горб» и «яма» производной подобны «горбу» самой функции — получаются из него сжатием в 2 раза по оси  $x$  и растяжением в 2 раза по оси  $y$ . Производная порядка  $n$  функции  $up(x)$  состоит из  $2^n$  горбиков и ям, также подобных «горбу» самой функции (рис. 13). Функция  $up(x)$  ни в одной точке носителя не аналитична — ряд Тейлора к ней не сходится. Поэтому вычислять ее значения с помощью ряда Тейлора нельзя. Указанное выше интеграль-

ное представление функции  $\text{up}(x)$  также весьма неудобно для вычислений, так как содержит несобственный интеграл от произведения осциллирующей функции  $e^{ifx}$  на бесконечное произведение. Однако удалось установить, что значения функции  $\text{up}(x)$  в двоично-рациональных точках (т. е. точках вида  $k2^{-n}$ ) — рациональные числа и могут быть вычислены точно по несложным рекуррентным формулам). Для вычисления значений функции  $\text{up}(x)$  в любой точке был предложен ряд специального вида:

$$\text{up}(x-1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{p_1 + \dots + p_k} p_k \sum_{j=1}^k C_{jk} (x - 0, p_1 \dots p_k)^j,$$

где  $x = 0, p_1 \dots p_k$  — представленные числа  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) в двоичной системе счисления (например,  $1/3 = 0,010101 \dots$ ), а  $C_{jk}$  — известные рациональные числа. Этот ряд очень быстро сходится. Получается он с помощью следующего интересного свойства функции  $\text{up}(x)$ : линейные комбинации сдвигов функции  $\text{up}(x)$  содержат алгебраические многочлены любой степени, т. е. для любого  $m$  и любого алгебраического многочлена  $P_m(x)$  степени  $m$  существуют коэффициенты  $C_j$ , такие, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j \text{up}(x - j2^{-m}) = P_m(x).$$

Хотя сумма здесь бесконечная, фактически при каждом  $x$  в ней отлично от нуля только конечное число слагаемых (в силу финитности функции  $\text{up}(x)$ ). Как убедиться в справедливости этого свойства? Рассмотрим функцию  $\varphi(x) = \text{up}(x) + \text{up}(x-1)$  (сумму функции  $\text{up}(x)$  со сдвинутой вправо на 1 функцией  $\text{up}(x)$ ). Чему равна на отрезке  $[0, 1]$  производная  $\varphi'(x)$ ? Производная  $\text{up}'(x)$  здесь имеет «яму», а производная  $\text{up}'(x-1)$  — «горб», такой же по форме. Их сумма — нуль. Следовательно,  $\varphi'(x) \equiv 0$  на  $[0, 1]$  и  $\varphi(x) \equiv \text{const}$  на  $[0, 1]$ . Точно так же у функции  $\text{up}(x-1) + \text{up}(x-1+2^{-n})$  производная порядка  $n+1$  на участке  $[0, 2^{-n}]$  равна нулю, а поэтому на этом участке  $\text{up}(x-1) + \text{up}(x-1+2^{-n})$  — многочлен степени  $n$ .

Пусть  $UP_n$  — пространство функций на  $[-\pi, \pi]$  вида

$$\varphi(x) = \sum G_k \text{up}\left(\frac{x}{\pi} - k2^{-n}\right),$$

а  $\tilde{U}P_n$  — пространство функций такого же вида, но только  $2\pi$  — периодических, т. е. таких, что  $\varphi^{(i)}(-\pi) = \varphi^{(i)}(\pi)$  для  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Размерность пространства  $UP_n$  будет  $2^{n+1}$ , а размерность пространства  $\tilde{U}P_n$ , соответственно,  $2^{n+1} + n + 1$ . Очевидно также, что  $UP_n \subset UP_{n+1}$ ,  $\tilde{U}P_n \subset \tilde{U}P_{n+1}$ ,  $\tilde{U}P_n \subset UP_n$ . Оказывается, пространства  $\tilde{U}P_n$  почти экстремальны для классов  $\tilde{W}_C^r$ ,  $\tilde{W}_{L_2}^r$  (для всех  $r$ ), а пространства  $UP_n$  почти экстремальны для классов  $W_C^r$ ,  $W_{L_2}^r$  (и для классов  $\tilde{W}_C^r$ ,  $\tilde{W}_{L_2}^r$  в силу того, что  $\tilde{U}P_n \subset UP_n$ ,  $(2^{n+1} + n + 1) 2^{-n-1} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ ). Таким образом, погрешность приближения с помощью функции  $u_r(x)$  равна наилучшей возможной (для указанных выше классов) с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, которые с практической точки зрения не имеют значения. Действительно, погрешность  $3 \cdot 10^{-8}$  или  $3,0002 \cdot 10^{-8}$  — с практической точки зрения одно и то же. Оценка  $K_r n^{-r}$  при приближении по норме  $C$   $[-\pi, \pi]$  конкретной функции класса  $\tilde{W}_C^r$  может быть несколько улучшена. Для этого введем понятие модуля непрерывности функции  $f(x)$ . По определению, модуль непрерывности функции  $f(x)$  — функция  $\omega(f, h)$ , определяемая формулой

$$\omega(f, h) = \max_{|x_1 - x_2| < h} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Если  $f(x)$  непрерывна, то модуль непрерывности  $\omega(f, h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Пусть  $E_n(f)$  — наилучшее приближение функции  $f(x)$  в норме  $C$   $(2n - 1)$ -мерным пространством тригонометрических полиномов степени  $n - 1$ . В 1911 г. Джексон доказал, что, если  $f$  имеет непрерывную производную порядка  $r$ , то

$$E_n(f)_C \leq \frac{C_r}{n^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right).$$

Этот результат дает более точную оценку приближения конкретных функций из  $\tilde{W}_C^r$ , так как  $C_r \omega(f^{(r)}, n^{-1}) n^{-r}$  — бесконечно малая более высокого порядка, чем  $K_r n^{-r}$ . Оказывается, теорему типа Джексона можно получить и для приближения с помощью пространств  $\tilde{U}P_n$  из упомянутых выше результатов о приближении класса  $\tilde{W}_C^r$  с помощью  $\tilde{U}P_n$  с использованием аппарата так называемых функций Стеклова, совершенно аналогично тому, как теорема Джексона для приближения тригонометрическими по-

линомами получена в § 9.1 гл. 9 книги Н. П. Корнейчука [5]. Таким образом, с точки зрения теории приближений пространства линейных комбинаций сдвигов функции  $up(x)$  в какой-то мере универсальны (очень гладкие — аналитические функции приближаются с помощью этих пространств не самым лучшим образом по той естественной причине, что сама функция  $up(x)$  не аналитична). Выяснилось, что в пространствах  $\tilde{U}P_n, UP_n$  можно выбрать и локальный базис, столь важный с точки зрения практического применения результатов теории приближений, т. е. что любая функция, принадлежащая  $UP_n$  или  $\tilde{U}P_n$ , может быть представлена в виде:

$$f(x) = \sum_k C_k \varphi_{n,k}(x),$$

где  $\varphi_{n,k}(x)$  — функции, не равные нулю только на промежутке длиной  $(n+2)2^{-n}$  ( $(n+2)2^{-n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ), причем при каждом фиксированном  $x$  в сумме отлично от нуля не более  $n+2$  слагаемых. Наличие локального базиса связано в конечном счете с тем важным обстоятельством, что функция  $up(x)$  (как и многие другие атомарные функции, для которых в (45)  $c_k = kh+d$ ) является безгранично дробимой функцией (не путать с безграничной делимостью законов распределения случайных величин). По определению, финитная функция  $\varphi(x)$  называется безгранично дробимой, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует финитная функция  $\varphi_\varepsilon(x)$ , длина носителя которой не превышает  $\varepsilon$ , такая,

$$\text{что } \varphi = \sum_{k=1}^{M_\varepsilon} C_k \varphi_\varepsilon(x - d_k).$$

Функция  $\varphi_\varepsilon(x)$  называется при этом дробной компонентой функции  $\varphi(x)$ . Таким образом, функция безгранично дробима, если она может быть «составлена» из конечного числа сдвигов функции, не равной нулю только на сколь угодно малом промежутке. Примерами безгранично дробимых функций являются финитные сплайны ( $B$ -сплайны). Дробные компоненты  $B$ -сплайнов — сжатия самих  $B$ -сплайнов. Тривиальный, но очень важный пример безгранично дробимой функции — функция  $\varphi(x)$ , равная 1 на отрезке  $[0, 1]$  и нулю в остальных точках. Для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти  $N$  такое, что  $N^{-1} < \varepsilon$ . Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_N(x - kN^{-1}),$$

$$\text{где } G_N(x) = 1$$

на отрезке  $[0, N^{-1}]$  и равна нулю в остальных точках. В анализе, кроме обычного, поточечного, умножения функций  $f(x)g(x)$ , используется и другое — так называемая свертка:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(t)dt.$$

Нетрудно заметить, что свертка двух безгранично дробимых функций — функция бесконечно дробимая ( $\varepsilon$  — дробная компонента функции  $f * g$  — это просто свертка  $\frac{\varepsilon}{2}$  — дробных компонент функций  $f$  и  $g$ ). Так вот, значи-

тельная часть до сих пор изученных безгранично дробимых функций (включая и финитные сплайны) может быть получена с помощью операции свертки (может быть и бесконечно кратной) из приведенного выше тривиального примера кусочно-постоянной функции. Вместо кусочно-постоянной можно рассмотреть функцию  $\varphi(x)$ , равную  $e^{ax}$  на отрезке  $[0, 1]$  и нулю в остальных точках. Она также безгранично дробима. В качестве дробных компонент можно брать функции  $\varphi_N(x)$ , равные  $e^{ax}$  на отрезке  $[0, N^{-1}]$  и нулю в остальных точках. Тогда:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N e^{kN^{-1}} \varphi_N(x - kN^{-1}),$$

Рассматривая свертки таких функций, мы придем к показательным сплайнам, которые, следовательно, также безгранично дробимы, а с помощью бесконечно кратных сверток — к некоторым атомарным функциям, о которых будет сказано ниже. Все известные нам безгранично дробимые функции факторизуются подобным образом, т. е. их можно представить в виде:

$$\varphi_1 * \varphi_2 * \dots * \varphi_n * \dots,$$

где  $\varphi_n$  — безгранично дробимая функция простейшего вида, т. е. составленная из кусков — решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Локальный базис в пространствах  $UP_n$ ,  $\bar{UP}_n$  состоит из сдвигов функций  $\text{Fur}_n\left(\frac{x}{\pi}\right)$ . Функции  $\text{Fur}_n(x)$  являются дробными компонентами функции  $up(x)$  и задаются формулой:

$$\text{Fur}_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} F^{[n]}(t) dt,$$

где

$$F^{[n]}(t) = \left( \frac{\sin t 2^{-n-1}}{t 2^{-n-1}} \right)^{n+1} \prod_{j=n+2}^{\infty} \frac{\sin t 2^{-j}}{t 2^{-j}}.$$

Очевидно, что  $\text{Fur}_0(x) = \text{ur}(x)$ . Для функций  $\text{Fur}_n(x)$  имеет место следующая формула:

$$\begin{aligned} \text{Fur}_n(x) = 2^{-n-1} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+k}^k \text{Fur}_{n+1}(x - k 2^{-n-1} + \\ + (n+1) 2^{-n-2}). \end{aligned}$$

Носитель функции  $\text{Fur}_n(x)$  — отрезок  $[-(n+2)2^{-n-1}, (n+2)2^{-n-1}]$ . Производная порядка  $n+1$  функции  $\text{Fur}_n(x)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{Fur}_n^{(n+1)}(x) = 2^{(n+1)n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{n+1}^k \text{ur}(2^{n+1}x - \\ - 2k + (n+1)). \end{aligned}$$

Функции  $\text{Fur}_n(x)$  являются атомарными, т. е. удовлетворяют функционально-дифференциальному уравнению вида (45).

Функция  $\text{ur}(x)$  неотрицательна, интеграл от нее равен 1, следовательно, она является плотностью распределения некоторой случайной величины. Преобразование Фурье функции  $\text{ur}(x)$ , т. е. характеристическая функция этой случайной величины:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t 2^{-k}}{t 2^{-k}}.$$

Известно, что  $\sin t/t$  — характеристическая функция случайной величины, равномерно распределенной на отрезке  $[-1, 1]$ , а сумме независимых случайных величин соответствует произведение характеристических функций. Поэтому если  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  — последовательность независимых равномерно распределенных на  $[-1, 1]$  случайных величин, то случайная величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k}$$



имеет плотность распределения  $\varphi(x)$ . Здесь уместно вспомнить, что равномерно распределенную на  $[-1, 1]$  случайную величину  $\eta$  можно в свою очередь представить в виде:

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k 2^{-k},$$

где  $\{\eta_k\}$  — последовательность независимых дискретных случайных величин, принимающих с вероятностью  $1/2$  значения  $-1$  и  $1$  (случайная величина типа «орел» — «решка») точно так же, как если задать наугад действительное число  $x$  из отрезка  $[0, 1]$  ( $x=0, p_1 p_2 \dots p_n \dots$  в двоичной системе счисления, т. е.  $x = \sum_{n=1}^{\infty} p_n 2^{-n}$ ,  $p_n=0; 1$  — это

все равно, что задать наугад  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  — цифры записи числа  $x$  в двоичной системе счисления).

Таким образом, случайная величина, имеющая своей плотностью функцию  $\varphi(x)$ , получается из последовательности равномерно распределенных случайных величин с помощью той же операции, которая из последовательности дискретных случайных величин типа «орел» — «решка» дает равномерно распределенную случайную величину.

Нетрудно также видеть, что случайная величина  $\xi$ , плотность распределения которой — функция  $\varphi(x)$ , может быть представлена в виде суммы некоторого ряда независимых дискретных случайных величин. Безграничная дробимость функции  $\varphi(x)$  связана именно с этим. Случайную величину  $\xi$  назовем дискретно аппроксимируемой, если для любого  $\varepsilon > 0$  ее можно представить в виде суммы независимых случайных величин  $\xi_g$  и  $\xi_\varepsilon$ , где  $\xi_g$  — дискретна (множество значений ее конечно), а  $\xi_\varepsilon$  с вероятностью  $1$  принимает значения меньше  $\varepsilon$ . Если  $\xi$  имеет плотность распределения  $\varphi_\xi$ , то эта плотность — безгранично дробимая функция. Случайные величины, которые являются суммами рядов независимых дискретных величин — частный случай дискретно аппроксимируемых случайных величин — называются сильно дискретно аппроксимируемыми. Так, функция  $\varphi(x)$  — плотность распределения сильно дискретно аппроксимируемой случайной величины. Функции  $\theta_n(x)$  (финитные сплайны), рассмотренные в § 3, представляют собой плотности распределения случайных величин, которые являются суммами  $n+1$  независимых случайных величин, распределенных равномерно на  $[-1/2,$

$1/2]$ . При  $n \rightarrow \infty$  функции  $\theta_n(x)/(n+1)$  стремятся к плотности распределения нормальной случайной величины. Между функциями  $\theta_n(x)$  и  $\text{Fur}_n(x)$  имеется следующая связь:

$$\text{Fur}_n(x) = \theta_n(2^n x) * \text{up}(2^{n+1}x).$$

Функции  $\text{Fur}_n(x)2^{-n-1}(n+1)^{-1}$  также стремятся к плотности нормального закона. Аналогия между функциями  $\text{up}(x)$  и  $\theta_n(x)$  становится более явной, если вспомнить, что

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos x 2^{-k}.$$

Тогда

$$\theta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} (\cos 2^{-k} t)^{n+1} dt;$$

$$\text{up}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} (\cos 2^{-k} t)^{k-1} dt,$$

т. е. как функции  $\theta_n(x)$ , так и функция  $\text{up}(x)$  являются частными случаями функции

$$\varphi_{\alpha}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} (\cos 2^{-k} t)^{\alpha_k} dt.$$

Функциям  $\theta_n(x)$  соответствуют  $\alpha_k = \text{const}$ , а функциям  $\text{up}(x)$  и  $\text{Fur}_n(x)$  —  $\alpha_k = ak + b$  (линейная функция  $k$ ).

В связи с безгранично дробными функциями обсудим две возможные схемы приближения локальными функциями, которые целесообразно использовать в численных методах решения краевых задач для уравнений с частными производными. Первая, общепринятая в настоящее время, схема состоит в следующем. Для простоты мы будем рассматривать одномерный случай (на многомерный все рассуждения легко переносятся). Возьмем некоторую финитную функцию  $\varphi(x)$  (или несколько таких функций) и будем использовать для приближения линейные комбинации сдвигов сжатий функции  $\varphi(x)$ , т. е.

$$\varphi_h(x) = \sum_k C_k \varphi(xh^{-1} - \alpha_k).$$

Эта схема подробно изучена, например, в [20]. При этом установлено, что для получения хороших свойств приближения функций,  $n$  раз дифференцируемых, необходимо и

достаточно выполнения некоторых эквивалентных условий для функции  $\varphi(x)$ :

а) линейные комбинации сдвигов функции  $\varphi(x)$  должны содержать алгебраические многочлены степени  $n$ ;

б)  $\hat{\varphi}(0)$  должна не равняться нулю, а в точках  $kh$ ,  $k \neq n$  у функции  $\hat{\varphi}(t)$  должны быть нули порядка не ниже  $n+1$  (где  $\hat{\varphi}(t)$  — преобразование Фурье функции  $\varphi(x)$ ). В эту схему укладывается приближение сплайнами и сдвигами сжатий функции  $u_p(x)$ , причем для приближения  $n$  раз дифференцируемых функций нужно брать сплайны степени  $n$  или линейные комбинации сдвигов сжатий функции  $u_p(x)$  вида:

$$\sum_k C_k u_p(xh^{-1} - k2^{-n}).$$

Однако эта схема имеет следующий существенный недостаток. Очень часто приближенное решение краевой задачи с заданной точностью отыскивают следующим образом. Наперед сказать, сколько нужно взять базисных функций (какую взять размерность приближающего пространства), нельзя, точнее, любая оценка в реальной ситуации будет слишком завышенной. Поэтому сначала берут сравнительно небольшое число базисных функций (т. е. не очень маленькое  $h$ ), находят приближенное решение и каким-то образом оценивают его удовлетворительность с точки зрения точности. Если оно оказывается неудовлетворительным (или если оценку удовлетворительности, как часто бывает, провести трудно), решают задачу с большим числом базисных функций (с меньшим  $h$ ). Если это второе приближение оказывается удовлетворительным, счет прекращают, если нет — опять уменьшают  $h$ . Если оценка удовлетворительности решения не может быть проведена по-иному, то ее проводят так: сравниваются между собой два и более приближенных решения, если разность между ними (точнее, интересующая нас норма разности) меньше заданной погрешности, считают, что «все хорошо». (Такой подход не выдерживает, конечно, критики со строгой математической точки зрения, так как, например, для гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

а между тем  $S - S_n$  не меньше  $\frac{1}{n}$ , поскольку  $S = \infty$ .) При

этом для малых  $h$  (большого числа базисных функций) нужно решать большую линейную алгебраическую систему, а в случае нелинейной краевой задачи — нелинейную систему. Для решения часто применяют итерационные методы — методы последовательных приближений. Если первое приближение можно использовать в качестве начального для нахождения следующего, объем вычислений значительно сокращается. Но для этого желательно, чтобы первое приближение — элемент пространства  $L_h$  линейных комбинаций сдвигов сжатий функций  $\varphi(x)$  с коэффициентом сжатия  $h_1$  — можно было представить как элемент пространства  $L_{h_2}$  линейных комбинаций сдвигов сжатий функций  $\varphi(x)$  с коэффициентом сжатия  $h_2 < h_1$  (например,  $h_2 = 0,5 h_1$ ).

Однако это возможно только в том случае, если  $\varphi(x)$  — безгранично дробима на компоненты, которые являются ее сжатиями, т. е. только в том случае, когда  $\varphi(x)$  — финитный сплайн (полиномиальный).

Вторая схема, предлагаемая нами, состоит в следующем. Возьмем любую безгранично дробимую функцию  $\varphi(x)$  (а класс безгранично дробимых функций, как мы убедились, не ограничивается сплайнами) и будем разыскивать приближенное решение задачи в виде линейных комбинаций сдвигов функции  $\varphi(x)$  (не сжимая ее). Если нужна большая точность, т. е. нужно увеличить размерность приближающего пространства, к используемым ранее сдвигам функции  $\varphi(x)$  добавим новые (так что будут использоваться сдвиги по более мелкой сетке).

По построению решение, найденное на любом этапе вычислений, можно использовать для нахождения следующего приближения.

В силу безграничной дробимости функции  $\varphi(x)$  в пространстве ее сдвигов можно всякий раз выбирать локальный базис, состоящий из сдвигов ее соответствующей дробной компоненты. Заметим, что по отношению к обыкновенным полиномиальным сплайнам обе схемы приводят к одному и тому же результату, поскольку дробные компоненты  $B$ -сплайна — это его сжатия.

Кроме функции  $u_r(x)$  и ее дробных компонент  $\text{Fur}_n(x)$ , до настоящего времени изучались атомарные функции  $\Xi_n(x)$ ,  $y_h(x)$ ,  $g_{h,h}(x)$  [11, 13]. Функция  $\Xi_n(x)$  — непосредственное обобщение функции  $u_r(x)$  — это финитное с носителем  $[-1, 1]$  решение уравнения:

$$y^{(n)}(x) = (n+1)^{n+1} 2^{-n} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k y((n+1)x + n - 2k),$$

которое имеет вид:

$$\Xi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\sin t(n+1)^{-k}}{t(n+1)^{-k}} \right)^n dt$$

легко видеть, что  $\Xi_1(x) \equiv \text{up}(x)$ . Линейные комбинации сдвигов функции  $\Xi_n(x)$  могут являться алгебраическими многочленами любой степени, для них справедливы теоремы о приближениях, аналогичные приведенным выше для функции  $\text{up}(x)$ . Функция  $y_h(x)$  — это финитное решение уравнения:

$$y'(x) - ky(x) = \frac{ke^{-0,5k}}{\text{sh } 0,5k} \cdot y(2x+1) - \frac{ke^{0,5k}}{\text{sh } 0,5k} \cdot y(2x-1),$$

которое имеет вид:

$$y_h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \hat{y}_h(t) dt,$$

где

$$\hat{y}_h(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2 \text{sh } 0,5k} \cdot \frac{\text{sh}(0,5k + it2^{-n})}{0,5k + it2^{-n}}.$$

Носитель функции  $y_h(x)$  — отрезок  $[-1, 1]$ . Среди линейных комбинаций сдвигов функции  $y_h(x)$  содержатся показательные функции. Например,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{kij} y_h(x-j) = Ce^{kx}.$$

Функции  $g_{k,h}(x)$  — решения уравнения:

$$y''(x) + k^2 y(x) = ay(3x+2h) - by(3x) + ay(3x-2h),$$

где  $a = \frac{3}{2} \cdot \frac{k^2}{1 - \cos \frac{2kh}{3}}$ ,  $b = 2a \cos \frac{2kh}{3}$ . Они имеют вид:

$$g_{k,h}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \hat{g}_{k,h}(t) dt,$$

где

$$\hat{g}_{k,h}(t) = \prod_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{k^2}{1 - \cos \frac{2kh}{3}} \cdot \frac{\cos(2th3^{-l}) - \cos \frac{2}{3}kh}{k^2 - t^2 \cdot 9^{l-1}} \right\}.$$

Носитель функции  $g_{h,h}(x)$  — отрезок  $[-h, h]$ . Линейные комбинации сдвигов функций  $g_{h,h}(x)$  могут являться тригонометрическими полиномами, например,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( C_1 \cos \frac{2khm}{3} + C_2 \sin \frac{2khm}{3} \right) g_{h,h} \left( x - \frac{2mh}{3} \right) = \\ = A \cos kx + B \sin kx.$$

Таким образом, мы видим, что из сдвигов финитных атомарных функций можно, как из «атомов», составить элементарные функции  $x^m$ ,  $e^{ax}$ ,  $\sin kx$ ,  $\cos kx$ . Это — одна из причин того, что функции были названы атомарными. Атомарные функции занимают промежуточное место между сплайнами и тригонометрическими и алгебраическими многочленами, они более гладки, чем сплайны, и менее гладки, чем многочлены. Они обладают свойством локальности, как сплайны, и универсальны с точки зрения теории приближений (аппроксимативно универсальны), как многочлены. Конечно, за обладание одновременно свойством локальности и аппроксимативной универсальности приходится чем-то платить. Сплайны локальны, но аппроксимативно не универсальны (степень сплайна для получения оптимальной скорости приближения должна зависеть от гладкости приближаемой функции), но зато они более локальны, чем атомарные функции. Многочлены не локальны и аппроксимативно универсальны, но зато они более универсальны с точки зрения теории приближений, чем атомарные функции (а именно, очень гладкие — аналитические функции приближаются многочленами гораздо лучше, чем атомарными функциями). Хотя атомарные функции, с одной стороны, находятся «между» многочленами и сплайнами, с другой — сплайны гораздо ближе к многочленам, чем атомарные функции, поскольку сплайны — это просто «кусочные» многочлены. Интерполяция сплайнами степени  $r-1$  функции класса  $\bar{W}_C^r$  дает погрешность  $K_r N^{-r}$ , интерполяция тригонометрическими многочленами —  $CN^{-r} \ln N$ . Интерполяция класса  $\bar{W}_C^r$  элементами пространства  $\bar{U}_N^r$  сдвигов функции  $\text{up} \left( \frac{x}{\pi} \right)$  дает погрешность  $N^{-r} \ln \ln N$  [12]. Это хуже, чем погрешность интерполяции сплайнами, но лучше, чем погрешность интерполяции тригонометрическими многочленами. В пространстве  $\bar{U}_N^r$  легко построить и хороший ортогональный базис, а именно функции

$$\omega_j^{(n)}(x) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^{sn} F^{[n]}((j + s 2^{n+1}) \pi) e^{i(j + s 2^{n+1})x}$$

образуют ортогональный базис в  $U\mathbb{P}_n$ , причем состоящий из функций, которые при сдвигах на  $k2^{-n}$  почти не изменяются — только умножаются на некоторые коэффициенты. Иными словами, это в каком-то смысле инвариантный базис, состоящий из функций, близких к  $e^{ijx}$ . При фиксировании  $j$  и  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_j^{(n)}(x) [F^{[n]}(j\pi)]^{-1} = e^{ijx}.$$

Однако этот базис изменяется при изменении  $n$ . Оказывается, в  $L_2[-\pi, \pi]$  можно построить такой ортогональный базис  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \dots, \psi_{2^{n+1}}$  для каждого  $n$  является базисом пространства  $U\mathbb{P}_n$ . При этом при  $k > 2^{n+1}$  функция  $\psi_k$  будет инвариантна относительно сдвигов на  $s2^{-n}$  (при таких сдвигах будет только умножаться на числовой множитель). А именно, для  $2^{n+1} < k \leq 2^{n+2}$

$$\psi_k(x) = R_{k-2^{n+1}, 2}^{(n)} \omega_{k-2^{n+1}}^{(n+1)} - R_{k-2^{n+1}, 1}^{(n)} \omega_k^{(n+1)},$$

где

$$R_{j, 1}^{(n)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} F^{[n]}((j + 2^{n+2}s) \pi) F^{[n+1]}((j + 2^{n+2}s) \pi);$$

$$R_{j, 2}^{(n)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} F^{[n]}(j + 2^{n+1}(2s + 1) \pi) F^{[n+1]} \times \\ \times (j + (2s + 1) 2^{n+1} \pi).$$

Выше говорилось, что линейные комбинации сдвигов функции  $\text{up}(x)$  могут представлять собой многочлены любой степени. Оказывается, если  $\varphi(x)$  — финитная функция с носителем  $[-1, 1]$  такая, что для всех  $n$  существуют коэффициенты  $S_j^{(n)}$ , для которых

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} S_j^{(n)} \varphi(x - j 2^{-n}) \equiv x^n,$$

то либо  $\varphi(x) \equiv \text{up}(x)$ , либо для всех  $n$

$$\|\varphi^{(n)}(x)\|_{C[-1, 1]} > a 2^{C n^2},$$

где  $a > 0$ . Это означает, что  $\text{up}(x)$  — самая хорошая из

функций, сдвиги которых могут давать многочлены любой степени, так как

$$\| \text{up}^{(n)}(x) \|_{C[-1,1]} = 2^{n+1},$$

$$2^{n+2} = 2^{n+1} \cdot 2^{n+1}.$$

Для применения функции  $\text{up}(x)$  важно, чтобы с ней было удобно работать, т. е. чтобы легко было проводить вычисления, в которых участвует функция  $\text{up}(x)$ . Как мы уже отмечали, для вычисления  $\text{up}(x)$  есть очень быстро сходящийся ряд специального вида. Значения  $\text{up}(x)$  в точках вида  $k2^{-m}$  — рациональные числа. Кроме этого, легко вычисляются интегралы вида [15].

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \text{up}(x) e^{kx} dx; \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \text{up}(x) \cdot x^n dx;$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \text{up}(x) \cos nx dx; \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \text{up}(x) \sin nx dx,$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  — числа вида  $k2^{-m}$ . Производные функции  $\text{up}(x)$  просто выражаются через ее значения, поскольку функция  $\text{up}(x)$  удовлетворяет уравнению:

$$\text{up}'(x) = 2\text{up}(2x+1) - 2\text{up}(2x-1).$$

До сих пор наиболее широко применялись элементарные функции, построенные из решений уравнения:

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n+1} y'(x) + a_n y(x) = 0$$

(такими решениями могут быть алгебраические многочлены, показательные и тригонометрические функции).

Уравнения, которым удовлетворяют атомарные функции, являются простейшими обобщениями этого уравнения — справа вместо нуля поставлена линейная комбинация сдвигов сжатий функций  $y(x)$ , так что атомарные функции являются естественным расширением класса элементарных функций, которое стало необходимым в настоящее время, когда широко начали применяться финитные функции. Как мы видим, их целесообразно применять в численных методах там, где аппроксимируемая функция (например, решение краевой задачи) обладает неизвестной, но, возможно, большой гладкостью и где применение многочленов высокой степени затруднено ввиду их нефинитности. При этом для приближения функций  $n$  переменных, конечно, надо использовать функцию

$$\text{up}(n; x) = \prod_{i=1}^n \text{up}(x_i).$$



Вполне возможно, однако, что атомарные функции найдут применение и в других областях математики, а не только в теории приближений и численных методах (вспомним хотя бы их вероятную интерпретацию). Изучение атомарных функций началось только с 1971 г., когда была построена функция  $\text{pr}(x)$  [10] (сам термин «атомарные функции» появился в 1975 г. в работе [11]). К функции  $\text{pr}(x)$  можно прийти, решая следующую задачу. Пусть  $A$  — класс бесконечно дифференцируемых на  $[-1, 1]$  функций  $\varphi(x)$ , таких, что  $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ ,  $\varphi^{(n)}(k2^{1-n}) = 0$  для всех целых  $n \geq 1$ , и таких, что для каждой  $\varphi(x) \in A$  существует последовательность  $n_k \rightarrow \infty$  (для каждой  $\varphi(x)$ , вообще говоря, своя), что

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \|\varphi^{(n_k)}\| c^{2^{-n_k} + 1} \leq 1.$$

Тогда в классе  $A$  есть и единственная наибольшая функция  $\varphi^*(x)$ , т. е. такая, что для любой  $\varphi(x) \in A$ , любого  $x$  и любого  $i=0, 1, 2, \dots$   $|\varphi^{(i)}(x)| \leq |\varphi^{*(i)}(x)|$ . Оказывается,  $\varphi^*(x) \equiv \text{pr}(x)$ . Иными словами, решение выше сформулированной задачи на экстремум, оказывается, удовлетворяет функционально-дифференциальному уравнению. В §3 описывалось свойство минимальной кривизны, которым обладает интерполирующий кубический сплайн. Аналогичные свойства есть и у пространства линейных комбинаций сдвигов сжатий функции  $\text{pr}(x)$ , только нужно считать  $f_i$  не значениями функций в заданных точках, а интегралами от произведения  $f(x)$  на некоторую стремящуюся к  $\delta$ -функции Дирака  $\delta(x-x_i)$  функцию. На самом деле в результате любых измерений мы получаем как раз не значение измеряемой величины в данной точке, а некоторую усредненную величину, т. е. как раз интеграл от неизвестной функции на некоторую, правда, тоже неизвестную  $\sigma$ -образную функцию. С точки зрения теории «абстрактных» сплайнов атомарные функции, таким образом, также можно считать сплайнами, только сплайнами бесконечно дифференцируемыми. (Кстати, атомарная функция, которая является решением уравнения

$$y'(x) = \frac{9}{2}y(3x+2) - \frac{9}{2}y(3x-2)$$

— бесконечно дифференцируемая финитная функция, не равная тождественно нулю, на множестве полной меры, т. е. почти всюду — многочлен.) Классические сплайны об-

ладают конечной гладкостью в конечном множестве точек, а в остальных они обладают очень большой — аналитической гладкостью. Грубо говоря, атомарные функции получаются из классических сплайнов «размазыванием» этой конечной гладкости с отдельных точек, так что аналитическая гладкость переходит в более слабую — бесконечную дифференцируемость, которая зато получается уже всюду.

Атомарные функции могут оказаться полезными и для непосредственного описания явлений окружающего нас мира. Действительно, аналитические функции обладают «дальнодействием». Малейшее изменение какой-либо описываемой ими величины в данной точке пространства приводит к мгновенному изменению ее во Вселенной. Использование же кусочно-аналитических локальных функций дает скачкообразные изменения если не самой величины, то ее производных. Там, где нужна локальность и гладкость, нужны бесконечно дифференцируемые финитные функции, а среди таких функций атомарные наиболее простые и естественные. Это наводит также на мысль, что некоторые физические явления, для описания которых ранее применялись дифференциальные уравнения классического вида, на самом деле должны описываться дифференциальными уравнениями с отклоняющимися аргументами.

## § 5. ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Выше были описаны некоторые новые направления в теории приближений, важные с точки зрения приложений. В настоящем параграфе будут затронуты некоторые актуальные проблемы и перспективы. Читатель, наверное, обратил внимание на то, что хотя для решения краевых задач уравнений с частными производными желательно знать «колмогоровские» поперечники и экстремальные пространства в случае функциональных классов многих переменных, выше упоминались только поперечники и экстремальные пространства определенных классов  $W'_C$ ,  $\tilde{W}'_C$ ,  $W'_{L_2}$ ,  $\tilde{W}'_{L_2}$  функций на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Конечно, если идет речь о конкретной задаче для конкретного уравнения и конкретной области, поперечники класса  $\|Au\|_{L_2} \leq 1$  и экстремальные пространства легко указать — последние состоят из так называемых собственных функций краевой задачи. Однако для другой задачи и другой области собственные

функции будут другими, а построение собственных функций — задача не менее сложная, чем решение первоначальной краевой задачи. Собственные функции как аппарат приближения к решению имеет смысл находить только тогда, когда нужно много раз решать одну и ту же краевую задачу для одной и той же области. Чаще приходится решать одну и ту же краевую задачу для разных областей и разных правых частей, например, нужно решать следующую задачу:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x_1, x_2, x_3)$$

для области  $\Omega$ , и  $u=0$  на границе области  $\Omega$ , где область  $\Omega$  может быть самой различной. Для каждого типа областей можно преобразовать  $\Omega$  в некоторую стандартную область  $\Omega_0$  (например, куб или шар). Тогда уравнение  $\Delta u=f$  перейдет в  $A_\Omega u=f$ , где  $A_\Omega$  — дифференциальный оператор второго порядка, зависящий от  $\Omega$ . Пусть  $Q$  — некоторый класс областей  $\Omega$ . Можно поставить задачу — найти поперечники и экстремальные пространства для класса функций  $K$  в  $\Omega_0$ , таких, что для каждого  $u \in K$  существует  $\Omega \in Q$ , такая, что  $\|A_\Omega u\|_X < 1$  (где  $X=L_2(\Omega)$  или  $C(\Omega)$ ). Однако такие задачи пока не решены.

Далее, уже для класса  $\tilde{W}_C^r$  мы видели, что экстремальные пространства не единственны — уклонение класса  $\tilde{W}_C^r$  от пространства сплайнов степени  $r-1$  совпадает с уклонением класса  $\tilde{W}_C^r$  от пространства тригонометрических полиномов той же размерности. Но уклонение класса  $K$  от подпространства  $L_N$  определялось выше как погрешность приближения наиболее удаленного от  $L_N$  элемента  $K$ . Если уклонение класса  $K$  от двух подпространств той же размерности совпадает, то тогда с точки зрения теории приближений предпочесть, по-видимому, следует то подпространство, которое и в среднем приближает класс  $K$  лучше. Вопрос только в том, что понимать под средним значением погрешности приближения элементов класса  $K$  данным подпространством (в данной норме). Если на множестве  $K$  задана некоторая функция (в данном случае — погрешность приближения), то средним ее значением обычно называется отношение интеграла от этой функции по некоторой мере к мере множества  $K$ . Однако класс  $K$  в нашем случае — класс функций, т. е. бесконечномерен. Естественной же меры в бесконечномерных пространствах нет

(точнее, их слишком много, и неясно, на какой остановить свой выбор). Поэтому можно поступить так.  $\varepsilon$ -сетью множества  $K$  называется такой набор точек  $x_1, \dots, x_N$ , что расстояние от любой точки  $x \in K$  до некоторой точки  $x_j$  не превосходит  $\varepsilon$ . Минимальная  $\varepsilon$ -сеть — это  $\varepsilon$ -сеть, содержащая наименьшее число элементов среди всех  $\varepsilon$ -сетей с данным  $\varepsilon$ . Пусть  $N_\varepsilon(K)$  — число элементов в минимальной  $\varepsilon$ -сети. Множество, у которого для любого  $\varepsilon > 0$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть, называется вполне ограниченным. Классы, рассматриваемые в теории приближений, либо вполне ограничены, либо являются суммами вполне ограниченных множеств с конечномерными подпространствами (например,  $\tilde{W}_C$  есть сумма одномерного пространства констант с вполне ограниченным множеством тех функций  $f(x)$  из  $\tilde{W}_C$ , у которых  $f(0)=0$ ). Без ограничения общности можно поэтому считать, что класс  $K$  — вполне ограниченное множество. Минимальная  $\varepsilon$ -сеть при  $\varepsilon \rightarrow 0$  все точнее и точнее приближает класс  $K$ . Для самой  $\varepsilon$ -сети определить среднее значение функции  $f(x)$  (в нашем случае погрешности приближения с помощью данного подпространства) легко: возьмем сумму значений функции  $f(x)$  в точках минимальной  $\varepsilon$ -сети  $x_1, \dots, x_{N_\varepsilon}$  и разделим ее на число элементов минимальной  $\varepsilon$ -сети  $N_\varepsilon(K)$ :

$$(f(x_1) + \dots + f(x_{N_\varepsilon})) / N_\varepsilon(K)$$

Под средним значением  $f(x)$  на  $K$  будем понимать:

$$\bar{f}_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(x_1) + \dots + f(x_{N_\varepsilon})) / N_\varepsilon(K)$$

Несложно показать, что когда  $f(x)$  непрерывна и задана на достаточно хорошем множестве  $K$  конечномерного пространства  $\mathbf{R}^n$ , то такое определение среднего значения  $\bar{f}_k$  совпадает с обычным. Для каких пространств — сплайнов или тригонометрических многочленов такое среднее отклонение от  $\tilde{W}_C$  меньше — вопрос нерешенный. Наконец, следует остановиться еще на одном направлении в теории приближений, имеющем большое прикладное значение. Выше рассматривалось приближение функций выражением вида:

$$\sum_k C_k \varphi_k(x),$$

где  $\varphi_k(x)$  — фиксированные функции, т. е. приближения с помощью линейных пространств. Однако возможны, а в ряде случаев и целесообразны нелинейные приближения.

Пусть в ЭВМ у нас есть модули (размноженные в достаточно большом числе экземпляров), реализующие вычисление некоторых заранее выбранных функций одной и нескольких переменных:  $\sin x$ ,  $e^x$ ,  $\ln x$ ,  $x+y$ ,  $xy$  и т. д. Тогда мы можем вычислять сложные функции:  $e^{\sin(xy)}$ ,  $\sin(2x + e^{y \ln x})$  и т. п., т. е. осуществлять суперпозицию функций. Если мы ограничимся функциями, содержащими  $M$  суперпозиций, а исходных функций было  $N$ , то даже при небольших  $N$  и  $M$  число возможных вариантов будет астрономическим (больше  $M^N$ ). Пусть задан вполне ограниченный класс функций  $K$ , который нужно приближать. Как найти исходные функции  $\psi_1, \dots, \psi_N$ , чтобы множество  $A_M$  сложных функций от  $\psi_1, \dots, \psi_N$ , образованных с помощью не более чем  $M$  суперпозиций, наилучшим образом приближало класс  $K$  (хотя бы при  $M \rightarrow \infty$ ). Точнее, это означает следующее: множество  $A_M$  есть  $\varepsilon$ -сеть множества  $K$  для некоторого  $\varepsilon(M)$ , зависящего от  $M$ . Пусть  $|A_M|$  — число элементов в  $A_M$ , а  $N_{\varepsilon(M)}$  — число элементов в минимальной  $\varepsilon$ -сети. Ясно, что

$$\rho(M) = \frac{|A_M|}{N_{\varepsilon(M)}} \geq 1.$$

Требуется выбрать  $\psi_1, \dots, \psi_N$ , чтобы  $\rho(M)$  (мера неоптимальности множества  $A_M$ ) если и возрастала бы при  $M \rightarrow \infty$ , то по крайней мере как можно медленнее. Какие же функции двух переменных  $f(x, y)$  (операций) можно брать в качестве исходных, кроме сложения  $x+y$  и умножения  $xy$ . Сложение и умножение обладают свойством ассоциативности:

$$\begin{aligned} (x+y) + z &= x + (y+z) \\ (xy)z &= x(yz). \end{aligned}$$

Разумно потребовать, чтобы

$$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)).$$

Кроме сложения и умножения, этим свойством ассоциативности обладают и многие другие функции, например  $x+y+\alpha xy$  ( $\alpha = \text{const}$ ),  $\frac{xy}{x+y}$ ,  $\sqrt{x^2+y^2}$  и т. д.

Оказывается, можно построить такую гладкую функцию  $f_t(x, y)$ , что для  $0 \leq t \leq 1$   $f_t(x, y)$  ассоциативна и  $f_0(x, y) = x+y$ , а  $f_1(x, y) = xy$ , т. е. при изменении  $t$  от 0 до 1 сложение непрерывно деформируется в умножение, проходя только через ассоциативные операции. Пусть  $h_t(x) = (1-t)e^x +$

$+tx$ ,  $h_t^{-1}(x)$  — функция, обратная к  $h_t(x)$ . Тогда искомая функция  $f_t(x, y)$  имеет вид:

$$f_t(x, y) = h_t^{-1}[h_t(x) h_t(y)].$$

При  $t=0$

$$h_0(x) = e^x; h_0^{-1}(x) = \ln x;$$

$$f_0(x, y) = \ln(e^x e^y) = x + y.$$

При  $t=1$

$$h_1(x) = x; h_1^{-1}(x) = x;$$

$$f_1(x, y) = xy.$$

В заключение заметим, что подобно тому как операция сложения лежит в основе понятия ряда, а операция умножения — бесконечного произведения, на каждой ассоциативной операции можно строить бесконечные процессы со своими признаками сходимости и методами вычислений. В частности, операция  $f_t(x, y)$  позволяет построить бесконечный процесс, промежуточный между рядом и бесконечным произведением.

Впрочем, для формирования подобных процессов свойство ассоциативности вовсе не является обязательным, оно лишь приводит к значительным упрощениям. Например, взяв операцию  $f(x, y) = x + \frac{1}{y}$  с помощью последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  ( $a_i \neq 0$ ), получим бесконечный процесс:

$$f(a_1, f(a_2, f(a_3, \dots))) = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}},$$

представляющий собой бесконечную цепную дробь [18]. Используя суперпозиции различных функций (не обязательно одноместных и двухместных), можем получить различные ветвящиеся процессы. Изучение таких процессов является особенно актуальным в связи с совершенствованием вычислительной техники в направлении создания ЭВМ с переменной структурой (так называемых однородных вычислительных сред).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1977, с. 349.
- [2] Деклу Ж. Метод конечных элементов. М., «Мир», 1976, с. 95.
- [3] Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М., «Недра», 1974, с. 239.
- [4] Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Гостехиздат, 1950, с. 695.
- [5] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М., «Наука», 1976, с. 320.
- [6] Лоран П.—Х. Аппроксимация и оптимизация. М., «Мир», 1975, с. 496.
- [7] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М., «Наука», 1973, с. 352.
- [8] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970, с. 511.
- [9] Носинова Б. У. Построение интерполирующих кубических сплайнов. ДАН УССР, сер. А, № 3 (1977), 208—211.
- [10] Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Об одной финитной функции. ДАН УССР, сер. А, 1971, с 705—707.
- [11] Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Атомарные функции в математической физике.— В кн.: Математизация знаний и научно-технический прогресс. Киев, «Наукова думка», 1975.
- [12] Рвачев В. А. О приближении с помощью функции  $\text{ip}(x)$ . ДАН СССР, т. 233 (1977), с 295—296.
- [13] Рвачев В. А. Представление экспоненциальных функций финитными. ДАН УССР, сер. А, (1973), № 9, с 821—824.
- [14] Рвачев В. Л., Рвачев В. А. О применении функции  $\text{ip}(x)$  в методе конечных элементов.— В сб.: «Математическая физика». Вып. 17. Киев, «Наукова думка», 1975, с. 170—175.

- [15] Рвачев В. А. Некоторые финитные функции и их применения. — В сб.: «Математическая физика». Вып. 13. «Наукова думка», 1973, с. 139—149.
- [16] Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. Киев, «Наукова думка», 1974, с. 260.
- [17] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М., «Наука», 1976, с. 248.
- [18] Скоробогатько В. Я., Боднарчук П. И. Ветвящиеся целые дроби и их применение. Киев, «Наукова думка», 1974, с. 220.
- [19] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М., Изд-во МГУ, 1976, с. 304.
- [20] G. Fix, G. Strang. Fourier analysis of the finite element method in Ritz — Galerkin theory. *Studies in Appl. Math.*, 48 (1969), 265—273.
-



## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .	3
§ 1. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ . . . . .	4
§ 2. МЕТОД R-ФУНКЦИЙ . . . . .	14
§ 3. СПЛАЙНЫ . . . . .	34
§ 4. АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ . . . . .	41
§ 5. ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ . . . . .	57
ЛИТЕРАТУРА . . . . .	62

Владимир Логвинович РВАЧЕВ,  
Владимир Алексеевич РВАЧЕВ

### ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ И АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Главный отраслевой редактор В. П. Демьянов  
Редактор Ю. Я. Кочин. Мл. редактор Е. М. Авешников а. Обложка Л. П. Ромасенко. Художественный редактор М. А. Бабичева. Технический редактор А. М. Красавина. Корректор В. В. Каночкина.

ИБ № 1379

Т-04950 Индекс заказа 84303 Сдано в набор 16/1-78 г.  
Подписано к печати 17/11-78 г. Формат бумаги 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>  
Бумага типографская № 3 Бум. л. 1 Печ. л. 2 Усл. печ. л. 3,36  
Уч.-изд. л. 3,35 Тираж 42400 экз. Издательство «Знание». 101835,  
Москва, Центр, проезд Серова, д. 4. Заказ 18.  
Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета Министров СССР  
по делам издательства, полиграфии и книжной торговли,  
г. Чехова, Московской области  
Цена 11 коп.

